В.И. Саврин

МЕТОД КВАЗИПОТЕНЦИАЛА В ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.И. Саврин

МЕТОД КВАЗИПОТЕНЦИАЛА В ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Рекомендовано УМО
по классическому университетскому образованию РФ
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся по
специальности 010701 – Физика

Издательство «Самарский университет»
2006

УДК 530.145
ББК 22.31
С 136

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра общей и теоретической физики Самарского
государственного университета;
д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры квантовой теории и физики
высоких энергий
Московского государственного университета
О.А. Хрусталев

Саврин В.И.
С136 Метод квазипотенциала в теории связанных состояний: учебное пособие/В.И. Саврин; Федер. агенство по образованию. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2006. – 134 с.
ISBN 5-86465-339-X

В основу издания положен курс лекций, прочитанный автором в 2005 году студентам физического факультета Самарского государственного университета. В лекциях дается изложение схемы построения релятивистской теории связанных состояний на пространственно-подобной трехмерной гиперповерхности в пространстве Минковского. Предлагаемая схема представляет собой ковариантное обобщение известной процедуры приравнивания времен, которая лежит в основе одновременной формулировки квантовой теории поля и квазипотенциального подхода. Она позволяет описывать спектры, формфакторы и структурные функции составных релятивистских систем на привычном языке квазипотенциала, волновой функции и динамического уравнения типа уравнения Шредингера в трехмерном импульсном пространстве.

Издание адресовано студентам, аспирантам и научным сотрудникам.

УДК 530.145
ББК 22.317

ISBN 5-86465-339-X

Оглавление

Ведение

Как показывают многочисленные эксперименты, большинство известных в настоящее время частиц обладают нетривиальной внутренней структурой, т. е. являются составными объектами. Это, в первую очередь, касается адронов, которые состоят из кварков и глюонов, однако уже сейчас интенсивно ведется экспериментальный поиск экзотических частиц, например, лептокварков и возбужденных лептонов, которые также могли бы иметь составную природу.

Описание спектров, ширин и сечений рассеяния составных объектов требует построения последовательной теории связанных состояний. В нерелятивистском случае подобная теория строится с помощью динамического уравнения Шредингера на языке классического потенциала. Однако, при больших дефектах массы и высоких энергиях, которыми обладают составные частицы, соответствующая теория должна быть существенно релятивистской. Непосредственное вычисление указанных характеристик составных систем в рамках локальной квантовой теории поля вряд ли возможно, поскольку пока единственный известный способ расчета здесь базируется на теории возмущений, а природа образования связанных состояний взаимодействующих частиц безусловно должна определяться непертурбативными эффектами. Поэтому разумным представляется путь решения проблемы, основанный на использовании динамических уравнений в локальной квантовой теории поля, примерами которых могут служить уравнение Бете-Солпитера, уравнения Тамма-Данкоффа, квазипотенциальное уравнение Логунова-Тавхелидзе. Дело в том, что даже если ядра перечисленных интегральных уравнений удается построить только в низших порядках теории возмущений, разработка методов их точного или даже приближенного (но не пертурбативного) решения позволит учесть вклад непертурбативных эффектов взаимодействия при вычислении наблюдаемых характеристик связанных состояний.

В основу настоящего издания положен курс лекций, читавшийся автором в течение ряда последних лет студентам 5-го курса Отделения ядерной физики физфака МГУ. В лекциях дается последовательное изложение схемы построения релятивистской теории связанных состояний на пространственно-подобной трехмерной гиперповерхности в пространстве Минковского. Предлагаемая схема представляет собой ковариантное обобщение известной процедуры приравнивания времен, которая лежит в основе одновременной формулировки квантовой теории поля и квазипотенциального подхода.

Основной аргумент в пользу целесообразности такого построения состоит в том, что для расчета наблюдаемых характеристик процесса взаимодействия в системе частиц нет необходимости в описании протекания этого процесса во всем четырехмерном пространстве Минковского, а достаточно проследить эволюцию системы "на срезе"в виде произвольной пространственно-подобной поверхности.

Это приводит к возможности описания взаимодействия на привычном языке волновой функции, которая, как и в нерелятивистской теории, удовлетворяет трехмерному динамическому уравнению и допускает вероятностную интерпретацию. В отличие от четырехмерного формализма Бете-Солпитера в данной схеме отсутствуют относительные времена различных частиц в системе, и поэтому не возникает необходимости формулировать граничные условия по этим переменным, что было бы практически невозможно сделать, исходя из каких-либо физических соображений.

Ядро трехмерного динамического уравнения – квазипотенциал – представляет собой релятивистское обобщение квантово-механического потенциала, но в отличие от последнего, вообще говоря, является комплексным и нелокальным и зависит от энергии системы, что отражает, в первую очередь, чисто релятивистские эффекты рождения частиц и запаздывания взаимодействия. Явная аналогия описания релятивистских систем на базе трехмерного динамического уравнения с нерелятивистской картиной взаимодействия оказывается крайне полезной, поскольку позволяет использовать чисто эмпирические соображения классической физики при построении квазипотенциала взаимодействия.

Таким образом, в настоящих лекциях изложена теория релятивистских составных систем, базирующаяся на принципах и методах локальной квантовой теории поля. Еще раз подчеркнем, что основным объектом исследования здесь выступает волновая функция системы, удовлетворяющая определенному динамическому уравнению и физическим граничным условиям. Последние фактически задаются введением процедуры проектирования и сглаживания в пределах выбранной пространственно-подобной гиперповерхности. В лекциях в качестве этой гиперповерхности мы ограничиваемся рассмотрением произвольной гиперплоскости, а также конкретной ее калибровкой в форме Маркова-Юкавы.

Изложенный в лекциях подход применяется к построению квазипотенциала электромагнитного взаимодействия электрона с позитроном в низшем приближении однофотонного обмена. Показано, что даже в этом приближении взаимодействие релятивистских частиц описывается нелокальным, комплексным квазипотенциалом, явно зависящим от полной энергии системы двух частиц. При достаточно малых импульсах частиц квазипотенциал может быть приближенно сведен к локальному и исследован в конфигурационном пространстве относительных расстояний между частицами. При этом оказывается, что при положительных энергиях связи квазипотенциал осциллирует, причем частота осцилляций определяется величиной энергии связи. В случае пренебрежимо малой энергии связи он переходит в обычный нерелятивистский кулоновский потенциал.

В лекциях излагается также квазипотенциальный подход в релятивистском конфигурационном пространстве, связанном с импульсным пространством преобразованием с помощью функций, реализующих представление группы движений в пространстве Лобачевского. Исследована задача взаимодейтвия частиц посредством эмпирического кулоновского квазипотенциала в таком пространстве. Показано, что этот квазипотенциал моделирует свойство так называемой асимптотической свободы ("бегущей"константы связи) в квантовой хромодинамике. Важным выводом является то, что поведение спектра релятивистских связанных состояний в кулоновском квазипотенциале с большой константой связи существенно отличается от нерелятивистского кулоновского спектра. Для квазипотенциалов более сложной формы, учитывающих "запирание"кварков, дана схема применения релятивистского квазиклассического приближения.

Квазипотенциальный подход оказывается эффективным и при описании формфакторов распада мезонов. В лекциях даны примеры расчета основных распадов псевдоскалярного и векторного мезонов в рамках одновременной формулировки квантовой теории поля. Константы распада простым и естественным способом оказываются связанными с квазипотенциальной волновой функцией мезона, причем эта связь может существенно отличаться от соответствующих формул нерелятивистской квантовой механики, особенно для составных систем с большим дефектом массы.

Квазипотенциальный подход легко обобщается на случай взаимодействия трех и более частиц, и здесь мы даем схему редукции квазипотенциального уравнения для волновой функции рассеяния трех частиц, а также рассеяния частицы на связанном состоянии двух других частиц. В качестве приложения общей схемы к конкретным процессам мы ограничиваемся здесь упругим и инклюзивным взаимодействием лептона и мезона с тем, чтобы продемонстрировать на этих простейших примерах, как наблюдаемые формфакторы и структурные функции мезона могут быть выражены через его волновую функцию и что означает на этом языке понятие скейлинга.

В основу лекций легли результаты исследований целого ряда авторов, однако здесь мы даем ссылки лишь на основополагающие книги и серию обзоров, где содержится практически весь материал и имеется подавляющее большинство необходимых ссылок на оригинальные работы.

1. Одночастичные волновые функции

Рассмотрим свободное спинорное поле $\psi(x)$, подчиняющееся уравнению Дирака:

$$(i\hat{\partial}_x - m)\psi(x) = 0. \tag{1.1}$$

Запишем для него стандартное разложение по отрицательно- и положительно-частотным решениям $u^{(\pm)}(x;k)$ уравнения Дирака

$$(i\hat{\partial}_x - m)u^{(\pm)}(x;k) = 0, \tag{1.2}$$

которые мы будем называть одночастичными волновыми функциями, описывающими частицу или античастицу с заданным импульсом k:

$$\psi(x) = \int d^3\omega_{\mathbf{k}} \left\{ u^{(-)}(x;k)a^{(-)}(k) + u^{(+)}(x;k)a^{(+)}(k) \right\}, \tag{1.3}$$

где $d^3\omega_{\mathbf{k}} = d^3\mathbf{k}/(2\pi)^3 2k^0$ – инвариантный трехмерный элемент объема в импульсном пространстве на массовом гиперболоиде $k^2 = m^2$, а $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Аналогично (1.3) можно записать разложение для дираковски сопряженного поля $\bar{\psi} = \overset{*}{\psi}\gamma^0$:

$$\bar{\psi}(x) = \int d^3\omega_{\mathbf{k}} \left\{ \overset{*}{a}{}^{(+)}(k)\bar{u}^{(+)}(k;x) + \overset{*}{a}{}^{(-)}(k)\bar{u}^{(-)}(k;x) \right\}, \tag{1.4}$$

причем

$$\bar{u}^{(\pm)}(k;x)(i\hat{\partial}_x + m) = 0, \tag{1.5}$$

а операторы $a^{(\pm)}(k)$ и $\overset{*}{a}{}^{(\pm)}(k)$ удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям:

$$\left[a^{(\mp)}(k), \overset{*}{a}{}^{(\pm)}(k')\right]_+ = (2\pi)^3 2k^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{1.6}$$

Одночастичные волновые функции как решения уравнений Дирака (1.2) и (1.5) удовлетворяют соотношениям полноты:

$$i\int d^3\omega_{\mathbf{k}}\, u^{(\pm)}(x;k)\bar{u}^{(\mp)}(k;x') = S^{(\pm)}(x;x') \tag{1.7}$$

и нормировки:

$$\int\limits_\sigma d\sigma_\mu(x)\, \bar{u}^{(\pm)}(k;x)\gamma^\mu u^{(\mp)}(x;k') = (2\pi)^3 2k^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{1.8}$$

где σ – произвольная пространственно-подобная гиперповерхность в пространстве Минковского, а $d\sigma_\mu(x)$ – ее элемент. В соотношении (1.7) $S^{(\pm)}(x;x')$ – положительно- и отрицательно-частотная перестановочные функции, что следует из соотношения:

$$[\psi(x), \bar{\psi}(x')]_+ = \frac{1}{i}\left[S^{(+)}(x;x') + S^{(-)}(x;x')\right] = \frac{1}{i}S(x;x'), \tag{1.9}$$

вытекающего из разложений (1.3) и (1.4) и коммутационных соотношений (1.6).

Перестановочные функции $S(x;x')$ и $S^{(\pm)}(x;x')$ обладают рядом интересных свойств. Например, нетрудно получить соотношения:

$$u^{(\pm)}(x;k) = \frac{1}{i}\int\limits_{\sigma} d\sigma_\mu(x')\, S(x;x')\gamma^\mu u^{(\pm)}(x';k); \tag{1.10}$$

$$\bar{u}^{(\pm)}(k;x) = \frac{1}{i}\int\limits_{\sigma} d\sigma_\mu(x')\, \bar{u}^{(\pm)}(k;x')\gamma^\mu S(x';x), \tag{1.11}$$

которые представляют собой аналог известного в оптике принципа Гюйгенса. Смысл этих соотношений состоит в том, что, если одночастичные волновые функции нам заданы на произвольной пространственно-подобной поверхности σ, то с помощью функции $S(x;x')$ можно восстановить их в любой точке пространства Минковского.

Далее, нетрудно видеть, что функции $S^{(\pm)}(x;x')$ обладают проекционными свойствами:

$$\psi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{i}\int\limits_{\sigma} d\sigma_\mu(x')\, S^{(\pm)}(x;x')\gamma^\mu \psi(x'); \tag{1.12}$$

$$\bar{\psi}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{i}\int\limits_{\sigma} d\sigma_\mu(x')\, \bar{\psi}(x')\gamma^\mu S^{(\pm)}(x';x). \tag{1.13}$$

Наконец, отметим, что операторы "рождения"и "уничтожения"$a^{(\pm)}(k)$ и $\overset{*}{a}{}^{(\pm)}(k)$ в данном подходе можно рассматривать как сглаженные и спроектированные с помощью одночастичных волновых функций операторы свободного спинорного поля в импульсном пространстве:

$$a^{(\pm)}(k) = \int\limits_{\sigma} d\sigma_\mu(x)\, \bar{u}^{(\mp)}(k;x)\gamma^\mu \psi(x); \tag{1.14}$$

$$\overset{*}{a}{}^{(\pm)}(k) = \int\limits_{\sigma} d\sigma_\mu(x)\, \bar{\psi}(x)\gamma^\mu u^{(\mp)}(x;k). \tag{1.15}$$

Рассмотрим теперь пространство Фока векторов состояния и, в частности, состояние вакуума $|0\rangle$, определяемое условиями

$$a^{(-)}(k)|0\rangle = \overset{*}{a}{}^{(-)}(k)|0\rangle = 0, \tag{1.16}$$

и одночастичные состояния для частицы

$$|k\rangle = \overset{*}{a}{}^{(+)}(k)|0\rangle \tag{1.17}$$

и античастицы

$$|\overset{*}{k}\rangle = a^{(+)}(k)|0\rangle. \tag{1.18}$$

Используя разложения (1.3) и (1.4) , а также коммутационные соотношения (1.6) и определение вакуума (1.16), можно придать новый облик одночастичным волновым функциям частицы и античастицы:

$$u^{(-)}(x;k) = \langle 0|\psi(x)|k\rangle; \tag{1.19}$$

$$\bar{u}^{(-)}(k;x) = \langle 0|\bar{\psi}(x)|\overset{*}{k}\rangle. \tag{1.20}$$

Рассмотрим теперь гайзенбергово спинорное поле $\psi_{_H}(x)$. Его также можно разложить по одночастичным волновым функциям аналогично (1.3) и (1.4) :

$$\psi_{_H}(x) = \int d^3\omega_{\mathbf{k}} \left\{ u^{(-)}(x;k)a^{(-)}(k|\sigma) + u^{(+)}(x;k)a^{(+)}(k|\sigma) \right\}; \tag{1.21}$$

$$\bar{\psi}_{H}(x) = \int d^3\omega_{\mathbf{k}} \left\{ \overset{*}{a}{}^{(+)}(k|\sigma)\bar{u}^{(+)}(k;x) + \overset{*}{a}{}^{(-)}(k|\sigma)\bar{u}^{(-)}(k;x) \right\}, \tag{1.22}$$

где сглаженные и спроектированные операторы поля в импульсном пространстве

$$a^{(\pm)}(k|\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_{\mu}(x)\, \bar{u}^{(\mp)}(k;x)\gamma^{\mu}\psi_{H}(x); \tag{1.23}$$

$$\overset{*}{a}{}^{(\pm)}(k|\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_{\mu}(x)\, \bar{\psi}_{H}(x)\gamma^{\mu}u^{(\mp)}(x;k) \tag{1.24}$$

будут явно зависеть от гиперповерхности σ, и их уже нельзя интерпретировать как операторы "рождения"и "уничтожения", а их антикоммутаторы не будут равняться c-числовым функциям, как в (1.6). Заметим, однако, что для стабильных одночастичных состояний мы будем считать, что

$$\langle 0|\psi_{H}(x)|k\rangle = \langle 0|\psi(x)|k\rangle = u^{(-)}(x;k); \tag{1.25}$$

$$\langle 0|\bar{\psi}_{H}(x)|\overset{*}{k}\rangle = \langle 0|\bar{\psi}(x)|\overset{*}{k}\rangle = \bar{u}^{(-)}(k;x). \tag{1.26}$$

2. Одночастичные функции Грина

Рассмотрим одночастичную причинную функцию Грина свободной частицы:

$$S^c(x;x') = i\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\}|0\rangle =$$

$$= i\theta(x^0 - x'^0)\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle - i\theta(x'^0 - x^0)\langle 0|\bar{\psi}(x')\psi(x)|0\rangle. \quad (2.1)$$

Если ввести некоторый единичный времениподобный 4-вектор $\lambda\,(\lambda^2 = 1,\ \lambda^0 > |\boldsymbol{\lambda}|)$, то выражение (2.1) можно записать следующим образом:

$$S^c(x;x') =$$

$$= i\theta(\lambda x - \lambda x')\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle - i\theta(\lambda x' - \lambda x)\langle 0|\bar{\psi}(x')\psi(x)|0\rangle. \quad (2.2)$$

Это есть ковариантная запись хронологического произведения. Эквивалентность (2.1) и (2.2) легко доказать, опираясь на свойства 4-вектора λ, а также на принцип микропричинности:

$$[\psi(x), \bar{\psi}(x')]_+ = 0 \ \text{ при } \ (x - x')^2 < 0. \quad (2.3)$$

Воспользовавшись разложениями (1.3) и (1.4) нетрудно получить, что

$$S^c(x;x') = i\theta(\lambda x - \lambda x')\int d^3\omega_{\mathbf{k}}\, u^{(-)}(x;k)\,\bar{u}^{(+)}(k;x') -$$

$$-i\theta(\lambda x' - \lambda x)\int d^3\omega_{\mathbf{k}}\, u^{(+)}(x;k)\bar{u}^{(-)}(k;x') =$$

$$= \theta(\lambda x - \lambda x')S^{(-)}(x;x') - \theta(\lambda x' - \lambda x)S^{(+)}(x;x'), \qquad (2.4)$$

то есть выразить свободную причинную функцию Грина через одночастичные волновые функции или перестановочные функции. Кроме причинной функции Грина обычно вводят еще "запаздывающую"и "опережающую"функции Грина:

$$S^r(x;x') = \theta(\lambda x - \lambda x')S(x;x'); \qquad (2.5)$$

$$S^a(x;x') = -\theta(\lambda x' - \lambda x)S(x;x'). \qquad (2.6)$$

Рассмотрим теперь сглаженную и спроектированную функцию Грина в импульсном пространстве, отвечающую распространению свободной частицы с массой m:

$$S^{c(-)}(\mathbf{k};\mathbf{k}'|\sigma,\sigma') =$$
$$= \int\limits_{\sigma} d\sigma_\mu(x) \int\limits_{\sigma'} d\sigma_\nu(x')\, \bar{u}^{(+)}(k;x)\gamma^\mu S^c(x;x')\gamma^\nu u^{(-)}(x';k'). \quad (2.7)$$

В дальнейшем мы часто в качестве пространственно-подобной поверхности будем выбирать гиперплоскость $\lambda x = \tau$ с времениподобным вектором нормали λ и инвариантным временем τ. В этом случае соотношение (2.7) приобретает вид:

$$S^{c(-)}(\mathbf{k};\mathbf{k}'|\tau,\tau') =$$
$$= \int d^4x\, \delta(\lambda x - \tau)! \int d^4x'\, \delta(\lambda x' - \tau')\, \bar{u}^{(+)}(k;x)\hat{\lambda} S^c(x;x')\hat{\lambda} u^{(-)}(x';k'). \quad (2.8)$$

Используя (2.4), а также условия нормировки и ортогональности одночастичных волновых функций (1.8), получим:

$$S^{c(-)}(\mathbf{k};\mathbf{k}'|\tau,\tau') = i\theta(\tau - \tau')(2\pi)^3 2k^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \qquad (2.9)$$

Рассмотрим теперь полную одночастичную функцию Грина:

$$G(x;x') =$$

$$= i\theta(\lambda x - \lambda x')\langle 0|\psi_{_H}(x)\bar{\psi}_{_H}(x')|0\rangle - i\theta(\lambda x' - \lambda x)\langle 0|\bar{\psi}_{_H}(x')\psi_{_H}(x)|0\rangle. \tag{2.10}$$

После сглаживания и проектирования в импульсном пространстве имеем:

$$G^{(-)}(\mathbf{k};\mathbf{k}'|\tau,\tau') = i\theta(\tau - \tau')\langle 0|a^{(-)}(k|\tau)\overset{*}{a}{}^{(+)}(k'|\tau')|0\rangle -$$

$$-i\theta(\tau' - \tau)\langle 0|\overset{*}{a}{}^{(+)}(k'|\tau')a^{(-)}(k|\tau)|0\rangle, \tag{2.11}$$

где операторы $a^{(-)}(k|\tau)$ и $\overset{*}{a}{}^{(+)}(k|\tau)$ определяются формулами (1.23) и (1.24) при частном выборе пространственно-подобной поверхности. Далее воспользуемся полным набором состояний из пространства Фока и запишем (2.11) в следующем виде:

$$G^{(-)}(\mathbf{k};\mathbf{k}'|\tau,\tau') =$$

$$= i\theta(\tau - \tau')\sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n}\langle 0|a^{(-)}(k|\tau)|P_n\rangle\langle P_n|\overset{*}{a}{}^{(+)}(k'|\tau')|0\rangle -$$

$$-i\theta(\tau' - \tau)\sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n}\langle 0|\overset{*}{a}{}^{(+)}(k'|\tau')|P_n\rangle\langle P_n|a^{(-)}(k|\tau)|0\rangle, \tag{2.12}$$

где знак $\sum\!\!\!\!\!\!\int$ означает суммирование по всем возможным состояниям с заданным 4-вектором энергии-импульса P_n и числом частиц n и интегрирование по фазовому объему этих состояний.

В выражении (2.12), например, матричный элемент

$$\langle 0|a^{(-)}(k|\tau)|P_n\rangle = \int d^4x\,\delta(\lambda x - \tau)\bar{u}^{(+)}(k;x)\hat{\lambda}\langle 0|\psi_{_H}(x)|P_n\rangle =$$

$$= \int d^4x\, e^{-iP_n x}\delta(\lambda x - \tau)\bar{u}^{(+)}(k;x)\hat{\lambda}\langle 0|\psi_{_H}(0)|P_n\rangle. \qquad (2.13)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать одночастичные волновые функции в виде плоских волн:

$$u^{(\pm)}(x;k) = e^{\pm ikx}v^{(\pm)}(k); \qquad (2.14)$$

$$\bar{u}^{(\pm)}(k;x) = \bar{v}^{(\pm)}(k)e^{\pm ikx}, \qquad (2.15)$$

где в силу уравнений (1.2) и (1.5) биспиноры $v^{(\pm)}(k)$ и $\bar{v}^{(\pm)}(k)$ подчиняются уравнениям:

$$(\hat{k} \pm m)v^{(\pm)}(k) = 0; \qquad (2.16)$$

$$\bar{v}^{(\pm)}(k)(\hat{k} \mp m) = 0, \qquad (2.17)$$

а также условиям нормировки и полноты:

$$\bar{v}_\sigma^{(\pm)}(k)\hat{\lambda}v_{\sigma'}^{(\mp)}(k) = 2\varepsilon_k\delta_{\sigma\sigma'}; \qquad (2.18)$$

$$\sum_\sigma v_\sigma^{(\mp)}(k)\bar{v}_\sigma^{(\pm)}(k) = \hat{k} \pm m, \qquad (2.19)$$

где $\varepsilon_k = (\lambda k)$. В результате (2.13) принимает вид:

$$\langle 0|a^{(-)}(k|\tau)|P_n\rangle = \int d^4x\, e^{i(k-P_n)x}\delta(\lambda x - \tau)\bar{v}^{(+)}(k)\hat{\lambda}\langle 0|\psi_{_H}(0)|P_n\rangle. \qquad (2.20)$$

Вычисление интеграла по x в (2.20) представляет собой самостоятельный интерес. Проделаем цепочку простых преобразований:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \int d^4x \exp\{i(k - P_n - \varepsilon\lambda)x + i\varepsilon\tau\} =$$

$$= (2\pi)^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, \delta^{(4)}(k - P_n - \varepsilon\lambda) e^{i\varepsilon\tau} =$$

$$= (2\pi)^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, \lambda^0 \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{P_n} - \varepsilon)\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{P}_n - \varepsilon\boldsymbol{\lambda}) e^{i\varepsilon\tau} =$$

$$= (2\pi)^3 \lambda^0 \delta^{(3)} \left[\mathbf{k} - \mathbf{P}_n - (\varepsilon_k - \varepsilon_{P_n})\boldsymbol{\lambda}\right] e^{i(\varepsilon_k - \varepsilon_{P_n})\tau}. \qquad (2.21)$$

Таким образом,

$$\langle 0|a^{(-)}(k|\tau)|P_n\rangle = (2\pi)^3 \lambda^0 \delta^{(3)} \left[\mathbf{k} - \mathbf{P}_n - (\varepsilon_k - \varepsilon_{P_n})\boldsymbol{\lambda}\right] \times$$

$$\times e^{i(\varepsilon_k - \varepsilon_{P_n})\tau}\, \bar{v}^{(+)}(k)\hat{\lambda}\langle 0|\psi_{_H}(0)|P_n\rangle. \qquad (2.22)$$

Нетрудно, однако, показать, что при $\lambda^2 = 1$ δ-функция в (2.22) накладывает вполне определенную связь на 4-импульсы:

$$k - P_n - (\varepsilon_k - \varepsilon_{P_n})\lambda = 0, \qquad (2.23)$$

откуда следует, что

$$m^2 - P_n^2 = \varepsilon_k^2 - \varepsilon_{P_n}^2 \qquad (2.24)$$

и для δ-функции справедливо равенство

$$\lambda^0 \delta^{(3)} \left[\mathbf{k} - \mathbf{P}_n - (\varepsilon_k - \varepsilon_{P_n})\boldsymbol{\lambda}\right] =$$

$$= \frac{k^0}{\varepsilon_k}\delta^{(3)}\left[\mathbf{k} - \mathbf{P}_n - \left(\sqrt{\varepsilon^2_{P_n} - P^2_n + m^2} - \varepsilon_{P_n}\right)\boldsymbol{\lambda}\right]. \qquad (2.25)$$

В результате имеем

$$\langle 0|a^{(-)}(k|\tau)|P_n\rangle =$$

$$= (2\pi)^3 2k^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{k} - \mathbf{P}_n - (\varepsilon_k - \varepsilon_{P_n})\boldsymbol{\lambda}\right] e^{i(\varepsilon_k - \varepsilon_{P_n})\tau}\,\tilde{\Psi}^{(-)}_{P_n}, \qquad (2.26)$$

где

$$2\varepsilon_k\tilde{\Psi}^{(-)}_{P_n} = \bar{v}^{(+)}(k)\hat{\lambda}\langle 0|\psi_{_H}(0)|P_n\rangle; \qquad (2.27)$$

$$k = P_n + \left(\sqrt{\varepsilon^2_{P_n} - P^2_n + m^2} - \varepsilon_{P_n}\right)\lambda. \qquad (2.28)$$

Еще раз обратим внимание на эту своеобразную связь между импульсами k и P_n. С другой стороны, если проинтегрировать (2.20) по инвариантному времени, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\langle 0|a^{(-)}(k|\tau)|P_n\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k - P_n)2\varepsilon_{P_n}\tilde{\Psi}^{(-)}_{P_n}. \qquad (2.29)$$

Аналогично можно получить

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\langle 0|\overset{*}{a}{}^{(+)}(k|\tau)|P_n\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k + P_n)2\varepsilon_{P_n}\,\overset{*}{\tilde{\Psi}}{}^{(+)}_{P_n}, \qquad (2.30)$$

поэтому, в силу условий спектральности $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0$ и $P^0_n \geq 0$, можно заключить, что

$$\langle 0|\overset{*}{a}{}^{(+)}(k|\tau)|P_n\rangle \equiv 0. \qquad (2.31)$$

В результате выражение для полной одночастичной функции Грина (2.12) примет вид:

$$G^{(-)}(\mathbf{k};\mathbf{k}')|\tau,\tau') =$$

$$= i\theta(\tau-\tau')(2\pi)^3\lambda^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{k}-\mathbf{k}'-(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'})\boldsymbol{\lambda}\right]e^{i\varepsilon_k\tau-i\varepsilon_{k'}\tau'}2\varepsilon_k 2\varepsilon_{k'}\times$$

$$\times \sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n}(2\pi)^3\lambda^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{P}_n-\mathbf{k}-(\varepsilon_{P_n}-\varepsilon_k)\boldsymbol{\lambda}\right]e^{-i\varepsilon_{P_n}(\tau-\tau')}\,\tilde{\Psi}^{(-)}_{P_n}\,\overset{*}{\tilde{\Psi}}{}^{(+)}_{P_n}. \tag{2.32}$$

Воспользовавшись соотношением (2.25) и учитывая, что $k^2 = k'^2 = m^2$, получим:

$$G^{(-)}(\mathbf{k};\mathbf{k}'|\tau,\tau') = (2\pi)^3 2k^0\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')e^{i\varepsilon_k(\tau-\tau')}2\varepsilon_k\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}|\tau-\tau'), \tag{2.33}$$

где

$$\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}|\tau-\tau') = i\theta(\tau-\tau')\times$$

$$\times \sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n}(2\pi)^3\lambda^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{P}_n-\mathbf{k}-(\varepsilon_{P_n}-\varepsilon_k)\boldsymbol{\lambda}\right]e^{-i\varepsilon_{P_n}(\tau-\tau')}\tilde{\Psi}^{(-)}_{P_n}\,\overset{*}{\tilde{\Psi}}{}^{(+)}_{P_n}. \tag{2.34}$$

Определим теперь Фурье-образ этой функции Грина по разности инвариантных времен $\tau-\tau'$:

$$\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}|\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\tau-\tau')e^{i\varepsilon(\tau-\tau')}\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}|\tau-\tau') =$$

$$= \sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n}(2\pi)^3\lambda^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{P}_n-\mathbf{k}-(\varepsilon_{P_n}-\varepsilon_k)\boldsymbol{\lambda}\right]\frac{\tilde{\Psi}^{(-)}_{P_n}\,\overset{*}{\tilde{\Psi}}{}^{(+)}_{P_n}}{\varepsilon_{P_n}-\varepsilon-i0}. \tag{2.35}$$

Среди состояний в пространстве Фока, по которым проводится суммирование в формуле (2.35), выделим одночастичное с импульсом p ($p^2 = m^2$), для которого $\tilde{\Psi}^{(-)}_p = \overset{*}{\tilde{\Psi}}{}^{(+)}_p = 1$ в силу (2.27) и (2.18), тогда

$$\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}|\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon_k(\varepsilon_k - \varepsilon - i0)} + \sum_{P_{n'}}\!\!\!\!\!\!\int \Big\{(2\pi)^3\lambda^0\delta^{(3)}\times$$

$$\times\ \Big[\mathbf{P}_n - \mathbf{k} - (\varepsilon_{P_n} - \sqrt{\varepsilon^2_{P_n} - P^2_n + m^2}\,)\boldsymbol{\lambda}\Big]\,\frac{\tilde{\Psi}^{(-)}_{P_n}\ \overset{*}{\tilde{\Psi}}{}^{(+)}_{P_n}}{\varepsilon_{P_n} - \varepsilon - i0}\Big\}, \tag{2.36}$$

где суммирование и интегрирование проводятся по всему полному набору состояний, кроме одночастичного с $p^2 = m^2$. Выражение (2.36) представляет собой спектральное представление для полной одночастичной функции Грина. При этом спроектированная свободная функция Грина (2.4) в импульсном пространстве имеет вид:

$$\tilde{S}^{c(-)}(\mathbf{k}|\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon_k(\varepsilon_k - \varepsilon - i0)}. \tag{2.37}$$

В дальнейшем (раздел 8) нам понадобится функция Грина в импульсном пространстве, отвечающая распространению античастицы, которую следует определить следующим образом (ср. (2.7)):

$$G^{(+)}(\mathbf{k};\mathbf{k}'|\sigma,\sigma') =$$

$$= \int\limits_{\sigma} d\sigma_\mu(x) \int\limits_{\sigma'} d\sigma_\nu(x')\, \bar{u}^{(-)}(k;x)\gamma^\mu G(x;x')\gamma^\nu u^{(+)}(x';k'). \tag{2.38}$$

Проделав те же преобразования, что и с функцией Грина для частицы, несложно получить, что

$$G^{(+)}(\mathbf{k};\mathbf{k}'|\tau,\tau') = (2\pi)^3 2k^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') e^{-i\varepsilon_k(\tau-\tau')} 2\varepsilon_k \tilde{G}^{(+)}(\mathbf{k}|\tau-\tau'), \tag{2.39}$$

где

$$\tilde{G}^{(+)}(\mathbf{k}|\tau-\tau') = -i\theta(\tau'-\tau)\times$$
$$\times \sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n} (2\pi)^3 \lambda^0 \delta^{(3)}\left[\mathbf{P}_n - \mathbf{k} - (\varepsilon_{P_n} - \varepsilon_k)\boldsymbol{\lambda}\right] e^{i\varepsilon_{P_n}(\tau-\tau')} \; \overset{*}{\tilde{\Psi}}{}^{(-)}_{P_n} \tilde{\Psi}^{(+)}_{P_n}; \tag{2.40}$$

$$2\varepsilon_k \; \overset{*}{\tilde{\Psi}}{}^{(-)}_{P_n} = \langle 0|\bar{\psi}_{H}(0)|P_n\rangle \hat{\lambda} v^{(+)}(k). \tag{2.41}$$

В результате получим:

$$\tilde{G}^{(+)}(\mathbf{k}|\varepsilon) = -\frac{1}{2\varepsilon_k(\varepsilon_k+\varepsilon-i0)} - \sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_{n'}} \Bigg\{ (2\pi)^3 \lambda^0 \delta^{(3)} \times$$
$$\times \left[\mathbf{P}_n - \mathbf{k} - (\varepsilon_{P_n} - \sqrt{\varepsilon^2_{P_n} - P^2_n + m^2}\,)\boldsymbol{\lambda}\right] \frac{\overset{*}{\tilde{\Psi}}{}^{(-)}_{P_n} \tilde{\Psi}^{(+)}_{P_n}}{\varepsilon_{P_n}+\varepsilon-i0} \Bigg\}. \tag{2.42}$$

3. Одновременная волновая функция

Рассмотрим волновую функцию Бете-Солпитера для системы "частица-античастица":

$$\Phi_P(x_1, x_2) = \langle 0|T\{\psi_{_H}(x_1)\bar{\psi}_{_H}(x_2)\}|P\rangle, \tag{3.1}$$

где вектор из пространства Фока $|P\rangle$ описывает состояние этой двухчастичной системы до взаимодействия с полным 4-импульсом P. Отметим, что это состояние может быть: 1) одночастичным, и тогда речь идет о волновой функции связанного состояния частицы и античастицы; 2) двухчастичным, и тогда мы будем иметь волновую функцию, отвечающую рассеянию; 3) многочастичным, и тогда волновая функция (3.1) будет отвечать более сложному неупругому процессу.

Прежде всего мы проведем сглаживание и проектирование волновой функции (3.1) в соответствии с процедурой (1.23), (1.24) и получим волновую функцию в импульсном пространстве:

$$\Phi_P^{(-)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2|\sigma) =$$

$$= \int\limits_\sigma d\sigma_\mu(x_1) \int\limits_\sigma d\sigma_\nu(x_2)\, \bar{u}^{(+)}(k_1; x_1)\gamma^\mu \Phi_P(x_1, x_2)\gamma^\nu u^{(+)}(x_2; k_2) =$$

$$= \langle 0|a^{(-)}(k_1|\sigma)\, \overset{*}{a}{}^{(-)}(k_2|\sigma)|P\rangle. \tag{3.2}$$

Сглаживание здесь производится по одной и той же пространственно-подобной поверхности σ, поэтому координаты частицы и античастицы x_1 и x_2 всегда разделены пространственно-подобным интервалом. Важная особенность волновой функции (3.2) в импульсном пространстве состоит в том, что частица и античастица здесь всегда лежат на массовом гиперболоиде $k_1^2 = k_2^2 = m^2$. Два только что отмеченных свойства позволяют ввести вероятностную интерпретацию волновой функции системы взаимодействующих релятивистских частиц и провести описание такой системы полностью в трехмерной форме.

Из определения (3.1) вытекает, что

$$\Phi_P(x_1, x_2) = e^{-iPx_2}\Phi_P(x, 0), \tag{3.3}$$

где $x = x_1 - x_2$. Тогда выражение (3.2) при выборе в качестве σ плоскости $\lambda x = \tau$ и в представлении плоских волн (2.14), (2.15) примет вид одновременной волновой функции:

$$\Phi_P^{(-)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2|\tau) = \int d^4x_2\, \delta(\lambda x_2 - \tau)e^{i(k_1+k_2-P)x_2}\times$$
$$\times\int d^4x\, \delta(\lambda x)e^{ik_1x}\bar{v}^{(+)}(k_1)\hat{\lambda}\Phi_P(x,0)\hat{\lambda}v^{(+)}(k_2). \tag{3.4}$$

Поступая с интегралом по x_2 точно так же, как в (2.21), получаем

$$\Phi_P^{(-)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2|\tau) = (2\pi)^3 2\varepsilon_{k_2}\lambda^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{P} - \right.$$
$$\left. -\,(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_P)\boldsymbol{\lambda}\right] e^{i(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P)\tau}\tilde{\Phi}_P^{(-)}(\mathbf{k}_1), \tag{3.5}$$

где введена стационарная волновая функция

$$2\varepsilon_{k_2}\tilde{\Phi}_P^{(-)}(\mathbf{k}_1) = \int d^4x\, \delta(\lambda x)e^{ik_1x}\bar{v}^{(+)}(k_1)\hat{\lambda}\Phi_P(x,0)\hat{\lambda}v^{(+)}(k_2), \tag{3.6}$$

причем благодаря δ-функции в (3.5) и свойствам вектора λ имеется следующая связь между 4-импульсами:

$$k_1 + k_2 - P - (\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_P)\lambda = 0. \tag{3.7}$$

Сформулируем теперь асимптотическое условие Лемана-Симанзика-Циммермана для сглаженных операторов (1.23) и (1.24) в виде слабой сходимости их к операторам рождения и уничтожения в *in*- и *out*-секторах:

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \langle K| \overset{*}{a}{}^{(\pm)}(k|\tau)|P\rangle = \langle K| \overset{*}{a}{}^{(\pm)}_{out/in}(k)|P\rangle; \tag{3.8}$$

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \langle K|a^{(\pm)}(k|\tau)|P\rangle = \langle K|a^{(\pm)}_{out/in}(k)|P\rangle. \tag{3.9}$$

Теперь нетрудно выяснить асимптотические свойства волновой функции (3.5). Действительно, переходя к асимптотическим пределам в (3.2) и используя (3.8), (3.9), получаем:

$$\lim_{\tau\to-\infty} \Phi_P^{(-)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\tau) = \langle 0|a^{(-)}_{in}(k_1)\ \overset{*}{a}{}^{(-)}_{in}(k_2)|P\rangle = \langle k_1, \overset{*}{k}_2\ |P\rangle; \tag{3.10}$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} \Phi_P^{(-)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\tau) = \langle 0|a^{(-)}_{out}(k_1)\ \overset{*}{a}{}^{(-)}_{out}(k_2)|P\rangle =$$

$$= \langle k_1, \overset{*}{k}_2\ |S|P\rangle = \langle k_1, \overset{*}{k}_2\ |P\rangle + i\langle k_1, \overset{*}{k}_2\ |T|P\rangle, \tag{3.11}$$

где T – оператор столкновения, связанный с S-матрицей соотношением $S = I + iT$.

Если вектора из пространства Фока $|P\rangle$ и $|k_1, \overset{*}{k}_2\rangle$ отвечают разным состояниям, то в силу ортогональности

$$\langle k_1, \overset{*}{k}_2\ |P\rangle = 0, \tag{3.12}$$

Если же в качестве $|P\rangle$ взять вектор состояния системы "частица-античастица"$|p_1, \overset{*}{p}_2\rangle$, причем $P = p_1 + p_2$, то

$$\langle k_1, \overset{*}{k}_2 \, | p_1, \overset{*}{p}_2 \rangle = (2\pi)^3 2k_1^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1)(2\pi)^3 2k_2^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_2) =$$

$$= (2\pi)^3 2\varepsilon_{k_2} \lambda^0 \delta^{(3)} \left[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p_1} - \mathbf{p}_2 - (\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \right.$$

$$\left. -\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_2})\boldsymbol{\lambda} \right] (2\pi)^3 2k_1^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1), \qquad (3.13)$$

и поэтому в этом случае, отвечающем упругому рассеянию частицы и античастицы, асимптотические условия (3.10), (3.11) принимают вид:

$$\lim_{\tau \to -\infty} \Phi^{(-)}_{p_1 p_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | \tau) = (2\pi)^3 2\varepsilon_{k_2} \lambda^0 \delta^{(3)} \left[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p_1} - \mathbf{p}_2 - \right.$$

$$\left. - (\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_2})\boldsymbol{\lambda} \right] (2\pi)^3 2k_1^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1); \qquad (3.14)$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} \Phi^{(-)}_{p_1 p_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | \tau) = (2\pi)^3 2\varepsilon_{k_2} \lambda^0 \delta^{(3)} \left[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{p_1} - \mathbf{p}_2 - \right.$$

$$\left. -(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_2})\boldsymbol{\lambda} \right] \Big[(2\pi)^3 2k_1^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1) +$$

$$+ \frac{2\pi i}{2\varepsilon_{k_2}} \delta(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_2}) M(\mathbf{k}_1; \mathbf{p}_1 | P) \Big], \qquad (3.15)$$

где введена амплитуда упругого рассеяния $M(\mathbf{k}_1; \mathbf{p}_1 | P)$ с помощью стандартного соотношения

$$\langle k_1, \overset{*}{k}_2 \, | T | p_1, \overset{*}{p}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) M(\mathbf{k}_1; \mathbf{p}_1 | P). \qquad (3.16)$$

Из определения (3.1) нетрудно получить волновую функцию невзаимодействующих частиц, например, в начальном состоянии

$$\Phi^{(0)}_{p_1p_2}(x_1,x_2) = \langle 0|T\{\psi_{in}(x_1)\bar{\psi}_{in}(x_2)\}|p_1,\overset{*}{p}_2\rangle. \tag{3.17}$$

Воспользовавшись разложениями (1.3) и (1.4), а также коммутационными соотношениями (1.6), получаем:

$$\Phi^{(0)}_{p_1p_2}(x_1,x_2) = u^{(-)}(x_1;p_1)\bar{u}^{(-)}(p_2;x_2), \tag{3.18}$$

т.е., как и следовало ожидать, произведение одночастичных волновых функций частицы и античастицы. Отсюда имеем

$$\Phi^{(0)}_{p_1p_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\tau) = (2\pi)^3 2k_1^0\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{p}_1)(2\pi)^3 2k_2^0\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{p}_2) =$$

$$= (2\pi)^3 2\varepsilon_{k_2}\lambda^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\right.$$
$$\left.-\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_2})\boldsymbol{\lambda}\right]\tilde{\Phi}^{(0)}_{p_1p_2}(\mathbf{k}_1), \tag{3.19}$$

где

$$\tilde{\Phi}^{(0)}_{p_1p_2}(\mathbf{k}_1) = (2\pi)^3 2k_1^0\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{p}_1). \tag{3.20}$$

Обращаясь теперь к формуле (3.15), мы видим, что асимптотика введенной нами релятивистской волновой функции (3.2) согласуется с асимптотикой волновой функции в нерелятивистской квантовой механике в том смысле, что в обоих случаях в качестве коэффициента при расходящейся волне стоит амплитуда рассеяния. Это подтверждает правильность выбора в качестве релятивистской волновой функции конструкций (3.1) и (3.2).

4. Двухвременная функция Грина

Рассмотрим двухчастичную функцию Грина

$$G(x_1, x_2; x_1', x_2') = i\langle 0|T\{\psi_{_H}(x_1)\bar{\psi}_{_H}(x_2)\psi_{_H}(x_2')\bar{\psi}_{_H}(x_1')\}|0\rangle. \tag{4.1}$$

С помощью процедуры, аналогичной (3.2), спроектируем это выражение на одночастичные волновые функции частицы и античастицы, при этом в качестве пространственно-подобных поверхностей выберем, как всегда, гиперплоскости $\lambda x = \tau$ и $\lambda x' = \tau'$ в конечном и начальном состояниях. Тогда для функции Грина (4.1) в импульсном пространстве имеем (ср. формулу (2.11)) :

$$G^{(-)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2'|\tau, \tau') =$$

$$= i\theta(\tau - \tau')\langle 0|a^{(-)}(k_1|\tau)\ \overset{*}{a}{}^{(-)}(k_2|\tau)a^{(+)}(k_2'|\tau')\ \overset{*}{a}{}^{(+)}(k_1'|\tau')|0\rangle +$$

$$+ i\theta(\tau' - \tau)\langle 0|a^{(+)}(k_2'|\tau')\ \overset{*}{a}{}^{(+)}(k_1'|\tau')a^{(-)}(k_1|\tau)\ \overset{*}{a}{}^{(-)}(k_2|\tau)|0\rangle. \tag{4.2}$$

Используя теперь полный набор состояний из пространства Фока, можно записать

$$G^{(-)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2'|\tau, \tau') = i\theta(\tau - \tau')\times$$

$$\times \sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n} \langle 0|a^{(-)}(k_1|\tau)\ \overset{*}{a}{}^{(-)}(k_2|\tau)|P_n\rangle\langle P_n|a^{(+)}(k_2'|\tau')\ \overset{*}{a}{}^{(+)}(k_1'|\tau')|0\rangle +$$

$$+i\theta(\tau'-\tau)\sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n}\Big\{\langle 0|a^{(+)}(k_2'|\tau')\overset{*}{a}{}^{(+)}(k_1'|\tau')|P_n\rangle\times$$

$$\times\langle P_n|a^{(-)}(k_1|\tau)\overset{*}{a}{}^{(-)}(k_2|\tau)|0\rangle\Big\}. \qquad (4.3)$$

Далее можно показать, что в силу условия спектральности $k_1^0+k_2^0>0$ и $P_n^0\geq 0$ второе слагаемое в (4.3) равно нулю. Тогда с учетом (3.2) имеем

$$G^{(-)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_1',\mathbf{k}_2'|\tau,\tau')=$$

$$=i\theta(\tau-\tau')\sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n}\Phi^{(-)}_{P_n}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\tau)\ \overset{*}{\Phi}{}^{(+)}_{P_n}(\mathbf{k}_1',\mathbf{k}_2'|\tau'). \qquad (4.4)$$

Воспользовавшись (3.5), получаем:

$$G^{(-)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_1',\mathbf{k}_2'|\tau,\tau')=(2\pi)^3 2\varepsilon_{k_2}2\varepsilon_{k_2'}\lambda^0\delta^{(3)}\times$$

$$\times\Big[\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1'-\mathbf{k}_2'-(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{k_1'}-\varepsilon_{k_2'})\boldsymbol{\lambda}\Big]\times$$

$$\times\exp\{i(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2})\tau-i(\varepsilon_{k_1'}+\varepsilon_{k_2'})\tau'\}\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\ \tau-\tau'), \quad (4.5)$$

где 4-вектор P определяется соотношением:

$$P-\varepsilon_P\lambda=k_1+k_2-(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2})\lambda=k_1'+k_2'-(\varepsilon_{k_1'}+\varepsilon_{k_2'})\lambda, \quad (4.6)$$

а

$$\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\ \tau-\tau')=i\theta(\tau-\tau')\sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n}\Big\{(2\pi)^3\lambda^0\delta^{(3)}\times$$

$$\times\left[\mathbf{P}_n-\mathbf{P}-(\varepsilon_{P_n}-\varepsilon_P)\boldsymbol{\lambda}\right]e^{-i\varepsilon_{P_n}(\tau-\tau')}\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_n}(\mathbf{k}_1)\ \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{P_n}(\mathbf{k}_1')\Big\}. \quad (4.7)$$

Здесь следует обратить внимание на то, что, в отличие от обычной фейнмановской теории в импульсном пространстве, начальный 4-импульс не равен конечному:

$$k_1 + k_2 \neq k_3' + k_2', \tag{4.8}$$

но между ними имеется соотношение (4.6), которое обусловлено δ-функцией в (4.1) и обеспечивает сохранение лишь ортогональной к λ компоненты импульсов. Кроме того, все импульсы частиц лежат на массовом гиперболоиде

$$k_1^2 = k_2'^2 = k_2^2 = k_3'^2 = m^2, \tag{4.9}$$

поэтому в функции Грина (4.7) действительно можно выделить три независимые векторные переменные: $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_1'$ и полный 4-импульс P, причем

$$k_2 = P - k_1 - \left(\varepsilon_P - \varepsilon_{k_8} - \sqrt{(\varepsilon_P - \varepsilon_{k_5})^3 - (P - k_1)^2 + m^2}\right)\lambda; \tag{4.10}$$

$$k_2' = P - k_1' - \left(\varepsilon_P - \varepsilon_{k_1'} - \sqrt{(\varepsilon_P - \varepsilon_{k_1'})^2 - (P - k_1')^2 + m^2}\right)\lambda. \tag{4.11}$$

Сделав теперь Фурье-преобразование по разности времен $\tau - \tau'$, получаем спектральное представление для функции Грина:

$$\tilde{J}^{(-)}(\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_1'|P, \varepsilon_P) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d(\tau-\tau') e^{i\varepsilon_P(\tau-\tau')} \tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_1'|P, \tau-\tau') =$$

$$= \sum_{P_n}\!\!\!\!\!\!\!\int (2\pi)^3 \lambda^0 \delta^{(3)} \left[\mathbf{P}_n - \mathbf{P} - (\varepsilon_{P_n} - \varepsilon_P)\boldsymbol{\lambda}\right] \frac{\tilde{\Phi}_{P_n}^{(-)}(\mathbf{k}_1)\ \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}_{P_n}^{(+)}(\mathbf{k}_1')}{\varepsilon_{P_n} - \varepsilon_P - i0}, \tag{4.12}$$

причем спектральная плотность, как мы видим, выражается через билинейную форму одновременных волновых функций.

Свободную функцию Грина $\tilde{G}^{(0)}(\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_1'|P, \varepsilon_P)$ можно было бы вычислить с помощью описанной здесь процедуры непосредственно из формулы (4.1), подставив туда асимптотические свободные поля вместо гайзенберговых. Однако мы для этого воспользуемся непосредственно формулой (4.12), выделив в этом бесконечном разложении член с двухчастичным упругим промежуточным состоянием:

$$\int p^5 \omega_{\mathbf{p}_1} \int d^3 \omega_{\mathbf{p}_2} \Bigg\{ (2\pi)^3 \lambda^2 \delta^{(3)} \left[\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{P} - (\varepsilon_{p_1} + \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_P) \boldsymbol{\lambda} \right] \times \\ \times \frac{\tilde{\Phi}^{(-)}_{p_1 p_2}(\mathbf{k}_1) \; \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{p_2 p_2}(\mathbf{k}_1')}{\varepsilon_{p_1} + \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_P - i0} \Bigg\}, \tag{4.13}$$

где $\tilde{\Phi}^{(-)}_{p_1 p_2}(\mathbf{k}_1)$ – волновая функция, отвечающая упругому рассеянию частицы и античастицы. Поскольку нас интересует функzия Грина невзаимодействующих wастиц, следует взять в формуле (4.13) свободные волновые функции, определяемые выражением (3.20). В результате

$$\tilde{G}^{(0)}(\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_1'|P,\, \varepsilon_P) = \frac{(2\pi)^3 2k_1^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1')}{2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_P - i0)}, \tag{4.14}$$

где

$$\varepsilon_{k_2} = \sqrt{(\varepsilon_P - \varepsilon_{k_1})^2 - (P - k_1)^2 + m^2}\,. \tag{4.15}$$

5. Квазипотенциальное уравнение и условие нормировки

Рассмотрим спектральное представление для двухчастичной функции Грина (4.12) и выделим из бесконечной суммы слагаемое, отвечающее одночастичному промежуточному состоянию с импульсом p, массой M и какими-то другими квантовыми числами, которые мы не будем выписывать явно:

$$\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P) =$$

$$= \int d^3\omega_{\mathbf{p}}(2\pi)^3\lambda^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{p}-\mathbf{P}-(\varepsilon_p-\varepsilon_P)\boldsymbol{\lambda}\right]\times$$

$$\times\frac{\tilde{\Phi}^{(-)}_{Bp}(\mathbf{k}_1)\ \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{Bp}(\mathbf{k}_1')}{\varepsilon_p-\varepsilon_P-i0}+...=\frac{\tilde{\Phi}^{(-)}_{Bp}(\mathbf{k}_1)\ \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{Bp}(\mathbf{k}_1')}{2\varepsilon_p(\varepsilon_p-\varepsilon_P-i0)}+\ldots, \qquad (5.1)$$

где $\tilde{\Phi}^{(-)}_{Bp}(\mathbf{k}_1)$ – волновая функция связанного состояния частицы и античастицы с квантовыми числами выделенного нами одночастичного состояния и импульсом $\mathbf{p}$, причем

$$p = P + (\varepsilon_p - \varepsilon_P)\lambda; \quad \varepsilon_p = \sqrt{\varepsilon_P^2 - P^2 + M^2}. \qquad (5.2)$$

Исследуем выражение (5.1) вблизи значения $P^2 = M^2$. Поскольку выписанное нами явно слагаемое имеет особенность в этой точке, а вся оставшаяся сумма по промежуточным состояниям, обозначенная многоточием, регулярна, мы можем приближенно написать: $p \simeq P$; $\varepsilon_p \simeq \varepsilon_P - (P^2 - M^2)/2\varepsilon_P$, и, следовательно,

$$\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}_1; \mathbf{k}'_1|P, \varepsilon_P)|_{P^2 \approx M^2} \approx \frac{\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}_1) \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{BP}(\mathbf{k}'_1)}{M^2 - P^2 - i0}. \tag{5.3}$$

Домножая это соотношение слева на обратную функцию Грина, определяемую соотношением:

$$\int d^3\omega_{\mathbf{p}_1} \left[\tilde{G}^{(-)}\right]^{-1} (\mathbf{k}_1; \mathbf{p}_1|P, \varepsilon_P)\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{p}_1; \mathbf{k}'_1|P, \varepsilon_P) =$$

$$= (2\pi)^3 2k_1^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1), \tag{5.4}$$

и переходя к пределу $P^2 \to M^2$, мы вынуждены заключить, что

$$\int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1} \left[\tilde{G}^{(-)}\right]^{-1} (\mathbf{k}_1; \mathbf{k}'_1|P, \varepsilon_P)\big|_{P^2 = M^2} \tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}'_1) = 0. \tag{5.5}$$

Последнее соотношение представляет собой уравнение для волновой функции релятивистской связанной системы "частица-античастица". Если ввести обычным способом квазипотенциал взаимодействия

$$V(\mathbf{k}_1; \mathbf{k}'_1|P, \varepsilon_P) =$$

$$= \left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1} (\mathbf{k}_1; \mathbf{k}'_1|P, \varepsilon_P) - \left[\tilde{G}^{(-)}\right]^{-1} (\mathbf{k}_1; \mathbf{k}'_1|P, \varepsilon_P), \tag{5.6}$$

то нетрудно из (5.5) вывести следующее квазипотенциальное уравнение:

$$2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_P)\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}_1) = \int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1} V(\mathbf{k}_1; \mathbf{k}'_1|P, \varepsilon_P)\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}'_1). \tag{5.7}$$

Для этого необходимо лишь показать, что обратная к (4.14) функция имеет вид:

$$\left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,\varepsilon_P)=(2\pi)^3 2k_1^0\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}'_1)2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P). \tag{5.8}$$

Вернемся к приближенному равенству (5.3). Домножим его справа на обратную функцию Грина, а также на волновую функцию $\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}_1)$ и проведем соответствующие интегрирования по импульсам:

$$\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}_1)|_{P^2\to M^2}\approx\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}_1)\times$$

$$\times\int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}\int d^3\omega_{\mathbf{k}''_1}\,\overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{BP}(\mathbf{k}'_1)\frac{\left[\tilde{G}^{(-)}\right]^{-1}(\mathbf{k}'_1;\mathbf{k}''_1|P,\varepsilon_P)}{M^2-P^2-i0}\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}''_1), \tag{5.9}$$

откуда с учетом (5.5) вытекает, что при $P^2\to M^2$:

$$\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1}\int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}\,\overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{BP}(\mathbf{k}_1)\times$$

$$\times\frac{\left[\tilde{G}^{(-)}\right]^{-1}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,\varepsilon_P)-\left[\tilde{G}^{(-)}\right]^{-1}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,\varepsilon_P)\big|_{P^2=M^2}}{M^2-P^2-i0}\times$$

$$\times\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}'_1)\approx 1, \tag{5.10}$$

и при $P^2=M^2$ имеем:

$$\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1}\int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}\,\overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{BP}(\mathbf{k}_1)\frac{\partial}{\partial P^2}\left[\tilde{G}^{(-)}\right]^{-1}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,\varepsilon_P)\big|_{P^2=M^2}\times$$

$$\times\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}'_1) = -1. \tag{5.11}$$

Поскольку из соотношения (4.6) следует, что $P^2-(k_1+k_2)^2 = \varepsilon_P^2 - (\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2})^2$, здесь можно перейти от производной по P^2 к производной по $\varepsilon_P : \partial P^2 = 2\varepsilon_P \partial\varepsilon_P$.

Формула (5.11) дает условие нормировки для волновой функции релятивистского связанного состояния. Выражая теперь обратную функцию Грина через квазипотенциал по формуле (5.6) и используя (5.8), получаем:

$$\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} \overset{*}{\tilde{\Phi}}\,{}^{(+)}_{BP}(\mathbf{k}_1) 2\varepsilon_{k_2} \tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}_1) +$$

$$+\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} \int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1} \overset{*}{\tilde{\Phi}}\,{}^{(+)}_{BP}(\mathbf{k}_1) \frac{\partial}{\partial\varepsilon_P} V(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,\varepsilon_P)|_{P^2=M^2}\times$$

$$\times\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}'_1) = 2\varepsilon_P. \tag{5.12}$$

Если квазипотенциал не зависит от энергии, то условие нормировки квазипотенциальной волновой функции существенно упрощается и по виду близко к условию нормировки обычной квантово-механической волновой функции:

$$\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} \overset{*}{\tilde{\Phi}}\,{}^{(+)}_{BP}(\mathbf{k}_1) 2\varepsilon_{k_2} \tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}_1) = 2\varepsilon_P. \tag{5.13}$$

В дальнейшем мы часто будем пользоваться символьной записью выведенных интегральных уравнений, заменяя введенные функции операторами, а интегрирование по импульсам – операторным умножением. Так, уравнение (5.7) в символьной записи будет иметь вид:

$$\left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1}(\varepsilon_P)\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP} = V(\varepsilon_P)\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}. \tag{5.14}$$

Домножая его (в операторном смысле) слева на свободную функцию Грина, получим:

$$\tilde{\Phi}_{BP}^{(-)} = \tilde{G}^{(0)}(\varepsilon_P)V(\varepsilon_P)\tilde{\Phi}_{BP}^{(-)}. \tag{5.15}$$

Уравнение в таком виде справедливо безусловно только для волновой функции связанного состояния, удовлетворяющей начальному условию (3.10), (3.12). В случае состояния рассеяния, учитывая асимптотическое условие (3.14), мы должны записать следующее уравнение:

$$\tilde{\Phi}_{p_1p_2}^{(-)} = \tilde{\Phi}_{p_1p_2}^{(0)} + \tilde{G}^{(0)}(\varepsilon_P)V(\varepsilon_P)\tilde{\Phi}_{p_1p_2}^{(-)}. \tag{5.16}$$

Введем теперь новый оператор $T(\varepsilon_P)$ с помощью соотношения:

$$T(\varepsilon_P) = V(\varepsilon_P) + V(\varepsilon_P)\tilde{G}^{(0)}(\varepsilon_P)T(\varepsilon_P). \tag{5.17}$$

Используя это операторное соотношение можно исключить из (5.16) оператор квазипотенциала $V(\varepsilon_P)$:

$$\tilde{\Phi}_{p_1p_2}^{(-)} = \tilde{\Phi}_{p_1p_2}^{(0)} + \tilde{G}^{(0)}(\varepsilon_P)T(\varepsilon_P)\tilde{\Phi}_{p_1p_2}^{(0)}. \tag{5.18}$$

Последнее соотношение представляет собой уравнение эволюции, связывающее волновую функцию системы взаимодействующих частиц с волновой функцией свободных частиц в начальном состоянии. Для того, чтобы определить физический смысл оператора $T(\varepsilon_P)$ домножим соотношение (5.18) на $\exp\{i(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_P)\tau\}$ и устремим $\tau \to \infty$. Воспользовавшись теперь известным предельным равенством

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\exp\{i(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_P)\tau\}}{\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_P - i0} = 2\pi i\delta(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_P) \tag{5.19}$$

и сравнивая в данном пределе выражения (5.18) и (3.15), мы приходим к выводу, что

$$T(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P,\varepsilon_P)|_{\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}=\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2}} = M(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P). \tag{5.20}$$

Таким образом, функция $T(\varepsilon_P)$ представляет собой амплитуду упругого рассеяния частицы и античастицы вне энергетической поверхности и, как следует из равенства (5.20), при равенстве начальной и конечной энергий совпадает с физической амплитудой рассеяния.

Выпишем теперь соотношение (5.17) в полной форме:

$$T(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P,\varepsilon_P) = V(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P,\varepsilon_P)+$$
$$+\int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}\frac{V(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,\varepsilon_P)T(\mathbf{k}'_1;\mathbf{p}_1|P,\varepsilon_P)}{2\varepsilon_{k'_2}(\varepsilon_{k'_1}+\varepsilon_{k'_2}-\varepsilon_P-i0)}. \tag{5.21}$$

При заданном квазипотенциале $V(\varepsilon_P)$ это соотношение представляет собой уравнение для амплитуды упругого рассеяния вне энергетической поверхности и является обобщением уравнения Липпмана-Швингера.

Введем теперь некоторое другое ядро $U(\varepsilon_P)$ с помощью соотношения:

$$U(\varepsilon_P) = V(\varepsilon_P)+\frac{1}{2}V(\varepsilon_P)\left[\tilde{G}^{(0)}(\varepsilon_P)-\overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)}(\varepsilon_P)\right]U(\varepsilon_P), \tag{5.22}$$

где $\overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)}(\varepsilon_P)$ - оператор, эрмитово сопряженный к $\tilde{G}^{(0)}(\varepsilon_P)$. Исключая квазипотенциал $V(\varepsilon_P)$ из уравнения для амплитуды рассеяния, получим:

$$T(\varepsilon_P) = U(\varepsilon_P)+iU(\varepsilon_P)D(\varepsilon_P)T(\varepsilon_P), \tag{5.23}$$

где

$$D(\varepsilon_P) = \frac{1}{2i}\left[\tilde{G}^{(0)}(\varepsilon_P) - \overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)}(\varepsilon_P)\right]. \tag{5.24}$$

Воспользовавшись явным выражением для свободной функции Грина, легко показать, что оператору $D(\varepsilon_P)$ отвечает функция:

$$D(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P) = \frac{\pi}{2\varepsilon_{k_2}}\delta(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P)(2\pi)^3 2k_1^0\delta^3(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_1'), \tag{5.25}$$

которая обусловливает приравнивание начальной и конечной энергий под знаком интеграла в (5.23). Это позволяет нам приравнять вообще все начальные и конечные энергии в этом соотношении и записать его следующим образом:

$$M = U(\varepsilon_P) + iU(\varepsilon_P)D(\varepsilon_P)M. \tag{5.26}$$

В том случае, когда ядро $U(\varepsilon_P)$ задано, последнее равенство представляет собой уравнение непосредственно для амплитуды упругого рассеяния на энергетической поверхности $M(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P)$, которое в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$M(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P) = U(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P,\varepsilon_P) +$$

$$+ i\pi\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1'}\,\frac{\delta(\varepsilon_{k_1'}+\varepsilon_{k_2'}-\varepsilon_P)}{2\varepsilon_{k_2'}}U(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P)M(\mathbf{k}_1';\mathbf{p}_1|P). \tag{5.27}$$

Это уравнение для физической амплитуды рассеяния является релятивистским обобщением уравнения Гайтлера в теории затухания, а функция $U(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P)$ – релятивистским аналогом матрицы реакций.

6. Условие унитарности и свойства квазипотенциала

Рассмотрим одновременную волновую функцию двух взаимодействующих релятивистских частиц в состоянии рассеяния, определяемую в соответствии с формулой (3.5) следующим образом:

$$\tilde{\Phi}_P^{(-)}(\mathbf{k}_1|\tau) = \exp\{i(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_P)\tau\}\tilde{\Phi}_P^{(-)}(\mathbf{k}_1), \tag{6.1}$$

где τ – единое инвариантное время. Дифференцируя ее по времени, получаем:

$$\frac{\partial}{i\partial\tau}\tilde{\Phi}_P^{(-)}(\tau) = \frac{1}{2\varepsilon_{k_2}}\left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1}(\varepsilon_P)\tilde{\Phi}_P^{(-)}(\tau) = \frac{1}{2\varepsilon_{k_2}}V(\varepsilon_P)\tilde{\Phi}_P^{(-)}(\tau). \tag{6.2}$$

Здесь мы, как и в предыдущем разделе, воспользовались символьной записью и учли, что волновая функция удовлетворяет квазипотенциальному уравнению (5.14). Отметим, что уравнение (6.2) представляет собой релятивистский аналог уравнения Шредингера, а волновая функция $\tilde{\Phi}_P^{(-)}(\mathbf{k}_1|\tau)$ является его стационарным решением.

Рассмотрим теперь следующую билинейную форму (матрицу плотности):

$$\rho(P';P|\tau) = \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1}\ \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}_{P'}^{(+)}(\mathbf{k}_1|\tau)2\varepsilon_{k_2}\tilde{\Phi}_P^{(-)}(\mathbf{k}_1|\tau). \tag{6.3}$$

Очевидно, диагональные элементы этой матрицы плотности при $P' = P$ можно интерпретировать как полную вероятность нахождения двухчастичной системы в состоянии с заданными импульсами частицы и античастицы p_1 и p_2 ($P = p_1 + p_2$) и другими квантовыми числами, которые мы явно не выписываем. Продифференцируем матрицу плотности (6.3) по времени, используя формулы (6.1) и (6.2):

$$\frac{\partial}{i\partial\tau}\rho(P';P|\tau) == \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1}\Big[\overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{P'}(\mathbf{k}_1|\tau)\times$$

$$\times\left[2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P) - 2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{P'})\right]\tilde{\Phi}^{(-)}_{P}(\mathbf{k}_1|\tau)\Big] =$$

$$= \int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1}\ \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{P'}(\mathbf{k}'_1|\tau)\{[\tilde{G}^{(0)}]^{-1}(\mathbf{k}'_1;\mathbf{k}_1|P,\varepsilon_P) -$$

$$-[\ \overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)}]^{-1}(\mathbf{k}'_1;\mathbf{k}_1|P',\varepsilon_{P'})\}\tilde{\Phi}^{(-)}_{P}(\mathbf{k}_1|\tau) =$$

$$= \int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1}\Bigg[\overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{P'}(\mathbf{k}'_1|\tau)\,\{V(\mathbf{k}'_1;\mathbf{k}_1|P,\varepsilon_P) -$$

$$- \overset{+}{V}(\mathbf{k}'_1;\mathbf{k}_1|P',\varepsilon_{P'})\Big\}\,\tilde{\Phi}^{(-)}_{P}(\mathbf{k}_1|\tau)\Bigg]. \qquad (6.4)$$

Здесь мы воспользовались квазипотенциальным уравнением, сопряженным к (5.14):

$$\overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{P}(\tau)[\ \overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)}]^{-1}(\varepsilon_P) = \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{P}(\tau)\ \overset{+}{V}(\varepsilon_P). \qquad (6.5)$$

Полагая теперь в выражении (6.4) $P' = P$, получим для производной диагонального элемента матрицы плотности следующее представление:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\rho(P;P|\tau) = -2\langle\tilde{\Phi}^{(-)}_{P}, \frac{V(\varepsilon_P) - \overset{+}{V}(\varepsilon_P)}{2i}\tilde{\Phi}^{(-)}_{P}\rangle, \qquad (6.6)$$

где мы для краткости воспользовались символьной записью, смысл которой становится очевидным из сравнения (6.6) и (6.4). Известно, что из физических соображений полная вероятность нахождения системы в заданном состоянии должна либо сохраняться, либо убывать со временем (условие поглощения), поэтому ее производная по времени никогда не может быть положительной. Учитывая это и исходя из равенства (6.6), мы приходим к однозначному выводу, что антиэрмитова часть квазипотенциала, усредненная по данному двухчастичному состоянию, всегда будет неотрицательной. Таким образом, квазипотенциал взаимодействия двух частиц, в отличие от потенциала в нерелятивистской квантовой механике, является, вообще говоря, неэрмитовым, что связано с наличием поглощения в системе двух частиц (неупругих переходов), причем усредненная антиэрмитова часть квазипотенциала должна быть знакоопределенной.

Чтобы детальней понять происхождение поглощения в релятивистской задаче двухчастичного рассеяния, обратимся к условию унитарности для оператора столкновения:

$$T-\overset{+}{T}=i\,\overset{+}{T}\,T. \tag{6.7}$$

Взяв матричный элемент от этого соотношения между одинаковыми двухчастичными состояниями, получим:

$$\begin{aligned}\langle k_1,\overset{*}{k}_2\,|T|p_1,\overset{*}{p}_2\rangle-\langle k_1,\overset{*}{k}_2\mid\overset{+}{T}|p_1,\overset{*}{p}_2\rangle=\\ =i\sum_{P_n}\!\!\!\!\!\!\int\langle k_1,\overset{*}{k}_2\mid\overset{+}{T}|P_n\rangle\langle P_n|T|p_1,\overset{*}{p}_2\rangle,\end{aligned} \tag{6.8}$$

где мы воспользовались полным набором векторов состояния из пространства Фока. Выделив из суммы по промежуточным состояниям в явном виде слагаемое, отвечающее тому же двухчастичному состоянию, которое мы выбрали в начале и в конце взаимодействия, и вводя амплитуду упругого рассеяния по формуле (3.16), имеем:

$$M(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P)-\overset{+}{M}(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P)=$$

$$= 2\pi i\int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}\,\frac{\delta(\varepsilon_{k'_1}+\varepsilon_{k'_2}-\varepsilon_P)}{2\varepsilon_{k'_2}}\,\overset{+}{M}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P)M(\mathbf{k}'_1;\mathbf{p}_1|P)+$$
$$+iH(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P), \tag{6.9}$$

где через $H(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P)$ обозначен вклад всех неупругих каналов в условие унитарности:

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2)H(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P)=$$
$$=\sum\!\!\!\!\!\!\int_{P'_n}\langle k_1,\overset{*}{k}_2\mid\overset{+}{T}|P'_n\rangle\langle P'_n|T|p_1,\overset{*}{p}_2\rangle, \tag{6.10}$$

где суммирование производится по всем возможным промежуточным состояниям кроме совпадающего с начальным и конечным. Используя введенную ранее функцию (5.25), можно записать условие унитарности (6.9) в принятой нами символьной форме:

$$M-\overset{+}{M}=2i\,\overset{+}{M}\,D(\varepsilon_P)M+iH. \tag{6.11}$$

Вернемся теперь к рассмотрению производной от диагонального элемента матрицы плотности (6.6) и, воспользовавшись соотношением эволюции (5.18), запишем ее в виде:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\rho(P;P|\tau)=i\langle\tilde{\Phi}^{(0)}_{p_1p_2},[1+\overset{+}{T}(\varepsilon_P)\,\overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)}(\varepsilon_P)]\times$$
$$\times[V(\varepsilon_P)-\overset{+}{V}(\varepsilon_P)]\left[1+\tilde{G}^{(0)}(\varepsilon_P)T(\varepsilon_P)\right]\tilde{\Phi}^{(0)}_{p_1p_2}\rangle. \tag{6.12}$$

Учитывая теперь уравнение (5.16) для амплитуды упругого рассеяния вне энергетической поверхности, получим:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\rho(P;P|\tau)=i\langle\tilde{\Phi}^{(0)}_{p_1p_2},\Big\{T(\varepsilon_P)-\overset{+}{T}(\varepsilon_P)-\overset{+}{T}(\varepsilon_P)[\tilde{G}^{(0)}(\varepsilon_P)-$$

$$- \overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)}(\varepsilon_P)]T(\varepsilon_P)\Big\}\,\tilde{\Phi}^{(0)}_{p_1p_2}\rangle. \qquad (6.13)$$

Поскольку в правой части все операторы лежат на энергетической поверхности, мы можем воспользоваться условием унитарности (6.11) и окончательно получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\rho(P;P\mid\tau) = -2\langle\tilde{\Phi}^{(-)}_P, \frac{V(\varepsilon_P)-\overset{+}{V}(\varepsilon_P)}{2i}\tilde{\Phi}^{(-)}_P\rangle =$$

$$= -\langle\tilde{\Phi}^{(0)}_{p_1p_2}, H\tilde{\Phi}^{(0)}_{p_1p_2}\rangle = -H(\mathbf{p}_1;\mathbf{p}_1|P). \qquad (6.14)$$

Нетрудно видеть из определения (6.10) оператора H , что его диагональные элементы положительны, поэтому, во-первых, мы снова приходим к выводу, о положительной определенности усредненной антиэрмитовой части квазипотенциала. Во-вторых, заключаем, что наличие поглощения в системе (убывания вероятности) и антиэрмитовой части квазипотенциала однозначно связано с существованием неупругих каналов реакции в релятивистской теории.

В заключение этого раздела сопоставим уравнения (5.26) и (6.11) и исключим из них амплитуду M. В результате получим:

$$U(\varepsilon_p)-\overset{+}{U}(\varepsilon_P) = iH+\overset{+}{U}(\varepsilon_P)D(\varepsilon_P)H - HD(\varepsilon_P)U(\varepsilon_P)+$$

$$+i\,\overset{+}{U}(\varepsilon_P)D(\varepsilon_P)HD(\varepsilon_P)U(\varepsilon_P). \qquad (6.15)$$

Из этого условия унитарности для U-матрицы следует, что в отличие от нерелятивистской теории Гайтлера в данном случае она, вообще говоря, неэрмитова, и антиэрмитова часть ее непосредственно связана с вкладом всех неупругих каналов реакции.

7. Уравнение Бете-Солпитера

Для вывода уравнения Бете-Солпитера мы воспользуемся редукционной техникой в рамках локальной теории квантованных полей. Будем исходить из выражения (3.1) для волновой функции системы "частица-античастица"в состоянии рассеяния:

$$\Phi_{p_1p_2}(x_1,x_2) = \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)S\}|p_1,p_2\rangle =$$

$$= \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)S\}a^{(+)}(p_2)\ \overset{*}{a}{}^{(+)}(p_1)|0\rangle, \qquad (7.1)$$

где $\psi(x)$ – оператор фермионного поля в представлении взаимодействия. Воспользуемся следующими правилами коммутации операторов рождения (уничтожения) с произвольным функционалом $F(\psi,\bar{\psi})$ спинорных полей:

$$\Big[F(\psi,\bar{\psi}),\overset{*}{a}{}^{(\pm)}(p)\Big]_{\pm} = \int d^4x\ \frac{\delta F(\psi,\bar{\psi})}{\delta\psi(x)}u^{(\mp)}(x;p); \qquad (7.2)$$

$$\Big[a^{(\pm)}(p),F(\psi,\bar{\psi})\Big]_{\pm} = \int d^4x\ \bar{u}^{(\mp)}(p;x)\frac{\delta F(\psi,\bar{\psi})}{\delta\bar{\psi}(x)}, \qquad (7.3)$$

где у квадратной скобки берется знак "$-$", если функционал $F(\psi,\bar{\psi})$ четен по полям ψ и $\bar{\psi}$, и знак "$+$", если он нечетен.

Исходно в качестве функционала F в выражении (7.1) мы имеем:

$$F(\psi,\bar{\psi}) = T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)S\}, \qquad (7.4)$$

поэтому, дважды коммутируя его с операторами рождения частицы и античастицы, получаем:

$$\Phi_{p_1p_2}(x_1,x_2)=\int d^4y_1'\int d^4y_2'\,\Big[\bar{u}^{(-)}(p_2;y_2')\langle 0|\times$$

$$\times\frac{\delta^2}{\delta\bar{\psi}(y_2')\delta\psi(y_1')}T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)S\}|0\rangle u^{(-)}(y_1';p_1)\Big]. \qquad (7.5)$$

Вычислим теперь вакуумное ожидание второй вариационной производной, входящей в выражение (7.5):

$$\delta^{(4)}(x_1-y_1')\delta^{(4)}(x_2-y_2')-\delta^{(4)}(x_1-y_1')\langle 0|T\left\{\bar{\psi}(x_2)\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(y_2')}\right\}|0\rangle-$$

$$-\delta^{(4)}(x_2-y_2')\langle 0|T\left\{\psi(x_1)\frac{\delta S}{\delta\psi(y_1')}\right\}|0\rangle+$$

$$+\langle 0|T\left\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}(y_2')\delta\psi(y_1')}\right\}|0\rangle. \qquad (7.6)$$

Для дальнейшего расчета вакуумных ожиданий от хронологических произведений операторов поля и некоторого функционала полей ψ и $\bar{\psi}$ можно воспользоваться формулами:

$$\langle 0|T\left\{\psi(x)F(\psi,\bar{\psi})\right\}|0\rangle=\frac{1}{i}\int d^4y S^c(x;y)\langle 0|\frac{\delta F(\psi,\bar{\psi})}{\delta\bar{\psi}(y)}|0\rangle; \quad (7.7)$$

$$\langle 0|T\left\{F(\psi,\bar{\psi})\bar{\psi}(x')\right\}|0\rangle=\frac{1}{i}\int d^4y\langle 0|\frac{\delta F(\psi,\bar{\psi})}{\delta\psi(y)}|0\rangle S^c(y;x'). \qquad (7.8)$$

В результате выражение (7.6) можно записать следующим образом:

$$\delta^{(4)}(x_1-y_1')\delta^{(4)}(x_2-y_2') - S^c(x_1;x_2)R^{(2)}(y_2';y_1')+$$
$$+\delta^{(4)}(x_1-y_1')\int d^4y_2 R^{(2)}(y_2';y_2)S^c(y_2;x_2)+$$
$$+\delta^{(4)}(x_2-y_2')\int d^4y_1 S^c(x_1;y_1)R^{(2)}(y_1;y_1')+$$
$$+\frac{1}{i}\int d^4y_1\int d^4y_2 S^c(x_1;y_1)R^{(4)}(y_1,y_2;y_1',y_2')S^c(y_2;x_2), \tag{7.9}$$

где введены вакуумные ожидания радиационных операторов второго и четвертого порядков:

$$R^{(2)}(x;x') = i\langle 0|\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(x')}\overset{+}{S}|0\rangle; \tag{7.10}$$

$$R^{(4)}(x_1,x_2;x_1',x_2') = i\langle 0|\frac{\delta^4 S}{\delta\bar{\psi}(x_1)\delta\psi(x_2)\delta\bar{\psi}(x_2')\delta\psi(x_1')}\overset{+}{S}|0\rangle. \tag{7.11}$$

Подстановка выражения (7.9) в формулу (7.5) для волновой функции дает:

$$\Phi_{p_1p_2}(x_1,x_2) = \bar{u}^{(-)}(p_2;x_2)u^{(-)}(x_1;p_1)-$$
$$-S^c(x_1;x_2)\int d^4y_1'\int d^4y_2'\bar{u}^{(-)}(p_2;y_2')R^{(2)}(y_2';y_1')u^{(-)}(y_1';p_1)+$$
$$+\int d^4y_2\int d^4y_2'\bar{u}^{(-)}(p_2;y_2')R^{(2)}(y_2';y_2)S^c(y_2;x_2)u^{(-)}(x_1;p_1)+$$
$$+\int d^4y_1\int d^4y_1'\bar{u}^{(-)}(p_2;x_2)S^c(x_1;y_1)R^{(2)}(y_1;y_1')u^{(-)}(y_1';p_1)+$$

$$+\frac{1}{i}\int d^4y_1\int d^4y_2\int d^4y_1'\int d^4y_2'\Big[\bar{u}^{(-)}(p_2;y_2')S^c(x_1;y_1)\times$$

$$\times R^{(4)}(y_1,y_2;y_1',y_2')S^c(y_2;x_2)u^{(-)}(y_1';p_1)\Big]. \qquad (7.12)$$

Условие стабильности одночастичного состояния, которое было сформулировано ранее в виде равенств (1.25) и (1.26), приводит к тому, что второе, третье и четвертое слагаемые в выражении (7.12) зануляются. Действительно, используя описанную здесь редукционную технику, мы получаем, например, в случае условия (1.25):

$$\langle 0|T\left\{\psi(x)S\right\}\overset{*}{a}{}^{(+)}(k)|0\rangle =$$

$$= u^{(-)}(x;k)+\int d^4yS^c(x;y)\int d^4y'R^{(2)}(y;y')u^{(-)}(y';k) =$$

$$= u^{(-)}(x;k), \qquad (7.13)$$

откуда следует, что

$$\int d^4y\int d^4y'S^c(x;y)R^{(2)}(y;y')u^{(-)}(y';k) = 0. \qquad (7.14)$$

Следует заметить, однако, что для третьего и четвертого слагаемых в (7.12) не все обстоит так просто. Используя редукционную технику, мы можем записать полную одночастичную функцию Грина (2.10) следующим образом:

$$G(x;x') = S^c(x;x')+\int d^4y\int d^4y'S^c(x;y)R^{(2)}(y;y')S^c(y';x'). \qquad (7.15)$$

Нетрудно показать, что условие стабильности в форме (7.14) фактически означает совпадение особенностей полной и свободной одночастичных функций Грина в импульсном пространстве. Однако, как мы знаем на примере квантовой электродинамики, в теориях, включающих частицы с нулевой массой, такое совпадение может и не наблюдаться. Выход может состоять в том, чтобы исходно в указанных теориях придать всем частицам конечные массы, а после проведения вычислений в соответствующих случаях устремить их к нулю. Другой путь состоит в том, чтобы сохранить в выражении (7.12) третье и четвертое слагаемые и в дальнейшем работать с этим более сложным соотношением.

Мы, однако, для простоты предположим, что условие стабильности (7.14) все же выполняется, и тогда соотношение (7.12) можно представить в виде:

$$\Phi_{p_1p_2}(x_1,x_2)=\Phi^{(0)}_{p_1p_2}(x_1,x_2)+$$

$$+\int d^4y_1\int d^4y_2\int d^4y_1'\int d^4y_2'\Big[G^{(0)}(x_1,x_2;y_1,y_2)\times$$

$$\times R^{(4)}(y_1,y_2;y_1',y_2')\Phi^{(0)}_{p_1p_2}(y_1',y_2')\Big], \tag{7.16}$$

где волновая функция системы невзаимодействующих частицы и античастицы определяется формулой (3.18), и введена двухчастичная свободная функция Грина

$$G^{(0)}(x_1,x_2;y_1,y_2)=\frac{1}{i}S^c(x_1;y_1)S^c(x_2;y_2). \tag{7.17}$$

Соотношение (7.16) связывает волновую функцию системы двух взаимодействующих частиц со свободной волновой функцией, т.е. описывает эволюцию волновой функции с помощью ядра $R^{(4)}$. Введем теперь некоторую функцию K, связанную с $R^{(4)}$ следующим соотношением:

$$R^{(4)}(x_1,x_2;y_1,y_2)=K(x_1,x_2;y_1,y_2)+$$

$$+\int d^4y_1'\int d^4y_2'\int d^4x_1'\int d^4x_2'\times$$

$$\times\Big[K(x_1,x_2;y_1',y_2')G^{(0)}(y_1',y_2';x_1',x_2')R^{(4)}(x_1',x_2';y_1,y_2)\Big]. \quad (7.18)$$

Исключая функцию $R^{(4)}$ из выражения (7.16) с помощью последнего соотношения, получаем:

$$\Phi_{p_1p_2}(x_1,x_2)=\Phi^{(0)}_{p_1p_2}(x_1,x_2)+$$

$$+\int d^4x_1'\int d^4x_2'\int d^4y_1\int d^4y_2\times$$

$$\times\Big[G^{(0)}(x_1,x_2;x_1',x_2')K(x_1',x_2';y_1,y_2)\Phi_{p_1p_2}(y_1,y_2)\Big]. \qquad (7.19)$$

Если ядро $K(x_1,x_2;y_1,y_2)$ задано, то соотношение (7.19) представляет собой интегральное уравнение Бете-Солпитера для волновой функции системы двух релятивистских частиц в состоянии рассеяния, что определяется наличием неоднородного члена в этом уравнении, фиксирующего граничное значение волновой функции и отвечающего системе двух свободных частиц в начальном состоянии.

Таким образом, если известно ядро K, решая уравнение (7.19), можно найти волновую функцию, описывающую систему двух релятивистских взаимодействующих частиц. Однако, следует заметить, что интегрирование в уравнении Бете-Солпитера проводится по всему пространству Минковского независимо по координатам каждой частицы, поэтому они могут быть разделены времениподобным интервалом в отличие от соотношения (3.2), где эти координаты всегда разделены пространственно-подобным интервалом. Это обстоятельство приводит к тому, что при рассмотрении уравнения Бете-Солпитера привычная нам вероятностная трактовка волновой функции теряет смысл, поскольку не всегда оказывается возможным определить координаты обеих частиц в один и тот же момент времени. Кроме того, имеется неопределенность при выборе асимптотики волновой функции, поскольку из физических соображений не ясно, какое граничное условие следует наложить на волновую функцию по относительному времени частиц $x_1^0 - x_2^0$.

Сделав четырехмерное преобразование Фурье, мы можем перевести уравнение (7.19) в импульсное 4-мерное пространство:

$$\Phi_{p_1p_2}(k_1,k_2) = \Phi^{(0)}_{p_1p_2}(k_1,k_2) + \frac{1}{i}S^c(k_1)S^c(k_2)\frac{1}{(2\pi)^4}\times$$

$$\times\int d^4k_1'\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k_2' K(k_1,k_2;k_1',k_2')\Psi_{p_1p_2}(k_1',k_2'), \qquad (7.20)$$

где

$$S^c(k) = \frac{\hat{k}-m}{k^2-m^2+i0}; \qquad (7.21)$$

$$\Phi^{(0)}_{p_1p_2}(k_1,k_2) = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1-p_1)(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_2-p_2)v^{(-)}(p_1)\bar{v}^{(-)}(p_2); \qquad (7.22)$$

$$K(k_1,k_2;k_1',k_2') = \int d^4x_1\int d^4x_2\int d^4x_1'\int d^4x_2'\times$$

$$\times\exp\{ik_1x_1+ik_2x_2-ik_1'x_1'-ik_2'x_2'\}K(x_1,x_2;x_1',x_2'). \qquad (7.23)$$

Используя трансляционное свойство (3.3) волновой функции, мы имеем:

$$\Phi_{p_1p_2}(k_1,k_2) = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-p_1-p_2)\tilde{\Phi}_{p_1p_2}(k_1), \qquad (7.24)$$

причем

$$\tilde{\Phi}_{p_1 p_2}(k_1) = \int d^4 x e^{ik_1 x} \Phi_{p_1 p_2}(x, 0); \tag{7.25}$$

$$\tilde{\Phi}^{(0)}_{p_1 p_2}(k_1) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 - p_1) v^{(-)}(p_1) \bar{v}^{(-)}(p_2). \tag{7.26}$$

Таким образом, в волновой функции Бете-Солпитера явно выделяется закон сохранения полного 4-импульса системы:

$$k_1 + k_2 = p_1 + p_2, \tag{7.27}$$

в отличие от соотношения между импульсами (3.7), которое имеет место в случае одновременной волновой функции (3.5). Однако, следует отметить, что в формализме Бете-Солпитера мы имеем дело с виртуальными частицами, в то время как в одновременной формулировке все частицы (даже промежуточные) лежат на массовых гиперболоидах.

Снова обращаясь к трансляционной инвариантности, мы можем записать:

$$K(k_1, k_2; k_1', k_2') = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_1' - k_2') \tilde{K}(k_1; k_1' | P), \tag{7.28}$$

где $P = k_1 + k_2 = k_1' + k_2'$ – полный сохраняющийся 4-импульс системы, а

$$R^{(4)}(k_1, k_2; k_1', k_2') = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_1' - k_2') \tilde{R}^{(4)}(k_1; k_1' | P). \tag{7.29}$$

Окончательно уравнение (7.20) для волновой функции принимает вид:

$$\tilde{\Phi}_{p_1 p_2}(k_1) = \tilde{\Phi}^{(0)}_{p_1 p_2}(k_1) +$$

$$+ \frac{1}{i} S^c(k_1) S^c(P - k_1) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k_1' \tilde{K}(k_1; k_1' | P) \tilde{\Phi}_{p_1 p_2}(k_1'). \tag{7.30}$$

В свою очередь соотношение (7.18) в импульсном пространстве будет иметь следующий вид:

$$\tilde{R}^{(4)}(k_1;k_1'|P)=\tilde{K}(k_1;k_1'|P)+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int d^4q_1\tilde{K}(k_1;q_1|P)S^c(q_1)S^c(P-q_1)\tilde{R}^{(4)}(q_1;k_1'|P), \quad (7.31)$$

и его можно использовать для нахождения ядра уравнения Бете-Солпитера путем итераций, если известна функция $\tilde{R}^{(4)}$:

$$\tilde{K}(k_1;k_1'|P)=\tilde{R}^{(4)}(k_1;k_1'|P)-$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int d^4q_1\tilde{R}^{(4)}(k_1;q_1|P)S^c(q_1)S^c(P-q_1)\tilde{R}^{(4)}(q_1;k_1'|P)+\ldots \quad (7.32)$$

Таким образом, если задан лагранжиан взаимодействия и удается построить S-матрицу, мы можем, используя определение (7.11), вычислить функцию $\tilde{R}^{(4)}$ и с помощью (7.32) попытаться рассчитать ядро $\tilde{K}$. В частности, итерационный ряд должен хорошо сходиться в случае малой константы взаимодействия, и тогда открывается возможность находить $\tilde{K}$ в любом порядке теории возмущений, если известны низшие порядки функции $\tilde{R}^{(4)}$. Знание же ядра $\tilde{K}$ с точностью до некоторого конечного порядка теории возмущений после его подстановки в уравнение Бете-Солпитера (7.30) и точного решения последнего позволит описать даже некоторые непертурбативные эффекты.

Хотя мы здесь и описали принципиальную возможность решения двухчастичной релятивистской проблемы в рамках формализма Бете-Солпитера, не следует забывать о трудностях, которые встречаются на этом пути. Во-первых, наличие виртуальных частиц не позволяет однозначно сформулировать граничные условия. Во-вторых, отсутствие вероятностной трактовки волновой функции лишает нас возможности построения наглядной физической картины взаимодействия.

Проведем теперь процедуру сглаживания и проектирования (3.2) и (3.4) в соотношении (7.16). Для этого мы выпишем вначале некоторые формулы, которые понадобятся нам сейчас и в дальнейшем:

$$\int d^4x\delta(\tau-\lambda x)\bar{u}^{(\pm)}(k;x)\hat{\lambda}S^c(x;y)=$$

$$=\pm i\theta[\pm(\tau-\lambda y)]\bar{u}^{(\pm)}(k;y); \tag{7.33}$$

$$\int d^4x'\delta(\lambda x'-\tau')S^c(y';x')\hat{\lambda}u^{(\pm)}(x';k)=$$

$$=\mp i\theta[\mp(\lambda y'-\tau')]u^{(\pm)}(y';k). \tag{7.34}$$

Воспользовавшись первой формулой, мы очевидно преобразуем соотношение (7.16) к следующему виду:

$$\Phi^{(-)}_{p_1p_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\tau)=\Phi^{(0)}_{p_1p_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\tau)+$$

$$+\int d^4y_1\int d^4y_2\int d^4y_1'\int d^4y_2' i\theta(\tau-\lambda y_1)i\theta(\tau-\lambda y_2)\times$$

$$\times\bar{u}^{(+)}(k_1;y_1)\bar{u}^{(-)}(p_2;y_2')R^{(4)}(y_1,y_2;y_1',y_2')u^{(-)}(y_1';p_1)u^{(+)}(y_2;k_2). \tag{7.35}$$

Далее, выбирая одночастичные волновые функции в виде плоских волн и преобразуя $R^{(4)}$ в импульсное пространство по формуле (7.23), получаем:

$$\Phi^{(-)}_{p_1p_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\tau)=\Phi^{(0)}_{p_1p_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\tau)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int d^4q_1\frac{1}{2\pi}\int d^4q_2\lambda^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{q}_1-\mathbf{k}_1-(\varepsilon_{q_1}-\varepsilon_{k_1})\boldsymbol{\lambda}\right]\times$$

$$\times\lambda^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{q}_2-\mathbf{k}_2-(\varepsilon_{q_2}-\varepsilon_{k_2})\boldsymbol{\lambda}\right]\exp\left\{i(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{q_1}-\varepsilon_{q_2})\tau\right\}\times$$

$$\times\frac{\bar{v}^{(+)}(k_1)\bar{v}^{(-)}(p_2)R^{(4)}(q_1,q_2;p_1,p_2)v^{(-)}(p_1)v^{(+)}(k_2)}{(\varepsilon_{k_1}-\varepsilon_{q_1}-i0)(\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{q_2}-i0)}. \qquad (7.36)$$

При выводе этой формулы мы использовали следующие интегральные преобразования:

$$\int d^4y\, i\theta[\pm(\lambda y-\tau)]e^{\pm i(p-k)y}=$$

$$=(2\pi)^3\lambda^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{p}-\mathbf{k}-(\varepsilon_p-\varepsilon_k)\boldsymbol{\lambda}\right]\frac{\exp\{\pm i(\varepsilon_p-\varepsilon_k)\tau\}}{\varepsilon_k-\varepsilon_p-i0}. \qquad (7.37)$$

Учитывая теперь (7.27) и снимая интегрирования по 3-импульсам, мы получаем:

$$\Phi^{(-)}_{p_1p_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\tau)=\Phi^{(0)}_{p_1p_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2|\tau)+$$

$$+(2\pi)^3\lambda^0\delta^{(3)}\left[\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_2})\boldsymbol{\lambda}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{q_1}\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{q_2}\times$$

$$\times\Bigg[\exp\left\{i(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{q_1}-\varepsilon_{q_2})\tau\right\}2\pi\delta(\varepsilon_{q_1}+\varepsilon_{q_2}-\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_2})\times$$

$$\times\frac{\bar{v}^{(+)}(k_1)\bar{v}^{(-)}(p_2)\tilde{R}^{(4)}(q_1;p_1|P)v^{(-)}(p_1)v^{(+)}(k_2)}{(\varepsilon_{k_1}-\varepsilon_{q_1}-i0)(\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{q_2}-i0)}\Bigg]. \qquad (7.38)$$

Сравнивая теперь последнее равенство с представлением (3.5), мы приходим к следующему соотношению для одновременной функции двух релятивистских частиц в состоянии рассеяния:

$$\tilde{\Phi}^{(-)}_{p_1p_2}(\mathbf{k}_1) = \tilde{\Phi}^{(0)}_{p_1p_2}(\mathbf{k}_1) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{q_1}\frac{\bar{v}^{(+)}(k_1)\bar{v}^{(-)}(p_2)\tilde{R}^{(4)}(q_1;p_1|P)v^{(-)}(p_1)v^{(+)}(k_2)}{2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{k_1}-\varepsilon_{q_1}-i0)(\varepsilon_{q_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P-i0)}, \tag{7.39}$$

причем имеется связь между импульсами:

$$q_1 - k_1 = (\varepsilon_{q_1} - \varepsilon_{k_1})\lambda. \tag{7.40}$$

Принцип микропричинности и свойство спектральности в квантовой теории поля позволяет исследовать аналитические свойства основных объектов теории по различным переменным и представлять их в виде единых аналитических функций в комплексной плоскости. К числу таких основных объектов относится и функция $\tilde{R}^{(4)}$, входящая в выражение (7.39). Мы не будем здесь заниматься доказательством ее аналитичеких свойств, а только примем, что эти свойства таковы, что она допускает спектральное представление типа Йоста-Лемана-Дайсона:

$$\tilde{R}^{(4)}(q_1;p_1|P) = \frac{1}{(4\pi)^4 i}\int d^4k\int\limits_{\mu_0^2}^{\infty} d\mu^2\frac{\rho(k;p_1|P,\mu^2)}{(q_1-k)^2-\mu^2+i0}\,. \tag{7.41}$$

где $\rho(k;p_1|P,\mu^2)$ – спектральная плотность. Используя связь (7.40), это представление можно переписать следующим образом:

$$\tilde{R}^{(4)}(q_1;p_1|P) = \frac{1}{(4\pi)^4 i}\int d^4k \int\limits_{\mu_0^2}^{\infty} d\mu^2 \frac{\rho(k;p_1|P,\mu^2)}{(\varepsilon_{q_1}-\varepsilon_k)^2 - q^2 + i0}, \quad (7.42)$$

где $q = \sqrt{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k_1})^2 - (k-k_1)^2 + \mu^2}$.

Подставив теперь это спектральное представление в соотношение (7.39) и выполнив интегрирование по ε_{q_1} методом вычетов в соответствующих полюсах (аналогичные вычисления описаны более подробно в следующем параграфе), несложно свести это соотношение к уравнению эволюции (5.18). При этом для амплитуды упругого рассеяния вне энергетической поверхности возникает следующее представление:

$$T(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P,\varepsilon_P) = \frac{1}{(4\pi)^4}\int d^4k \int\limits_{\mu_0^2}^{\infty} d\mu^2 \times$$
$$\times\left[\frac{1}{2q}\left\{\frac{1}{\varepsilon_P - \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_k - q + i0} - \frac{1}{\varepsilon_{k_1} - \varepsilon_k + q - i0}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\bar{v}^{(+)}(k_1)\bar{v}^{(-)}(p_2)\rho(k;p_1|P,\mu^2)v^{(-)}(p_1)v^{(+)}(k_2)\right]. \quad (7.43)$$

Для физической амплитуды рассеяния (5.20), когда $\varepsilon_P = \varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}$, спектральное представление, очевидно, принимает вид:

$$M(\mathbf{k}_1;\mathbf{p}_1|P) == \frac{1}{(4\pi)^4}\times$$
$$\times\int d^4k \int\limits_{\mu_0^2}^{\infty} d\mu^2 \frac{\bar{v}^{(+)}(k_1)\bar{v}^{(-)}(p_2)\rho(k;p_1|P,\mu^2)v^{(-)}(p_1)v^{(+)}(k_2)}{(k-k_1)^2 - \mu^2 + i0}.$$
$$(7.44)$$

8. Квазипотенциал электромагнитного взаимолействия

Рассмотрим взаимодействие заряженной частицы с античастицей, например, электрона с позитроном. Двухчастичная полная функция Грина такой системы определяется соотношением (4.1) или в представлении взаимодействия

$$G(x_1, x_2; x_1', x_2') = i\langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_2')\bar{\psi}(x_1')S\} \overset{+}{S} |0\rangle. \quad (8.1)$$

S-матрица в случае электромагнитного взаимодействия имеет вид:

$$S = T\exp\left\{ie\int d^4x \ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x):\right\}, \quad (8.2)$$

поэтому, проводя редукцию выражения (8.1) с помощью формул (7.7) и (7.8) по той же схеме, что и для волновой функции Бете-Солпитера в предыдущем разделе, получим следующее представление для функции Грина (8.1):

$$G(x_1, x_2; x_1', x_2') = iS^c(x_1; x_1')G(x_2'; x_2) + iG(x_1; x_1')S^c(x_2'; x_2) -$$

$$-iS^c(x_1; x_1')S^c(x_2'; x_2) + iS^c(x_1; x_2)S^c(x_2'; x_1') -$$

$$-iS^c(x_1; x_2)G(x_2'; x_1') - iG(x_1; x_2)S^c(x_2'; x_1') +$$

$$+\int d^4y_1 \int d^4y_1' \int d^4y_2 \int d^4y_2' \times$$

$$\times\Big[S^c(x_1;y_1)S^c(x_2';y_2')R(y_1,y_2;y_1',y_2')S^c(y_1';x_1')S^c(y_2;x_2)\Big]. \tag{8.3}$$

Проведем теперь процедуру сглаживания и проектирования этого выражения с помощью одночастичных волновых функций, используя формулы (7.33) и (7.34). В результате имеем:

$$G^{(-)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_1',\mathbf{k}_2'|\tau,\tau') = iG^{(-)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|\tau,\tau')S^{c(+)}(\mathbf{k}_2';\mathbf{k}_2|\tau',\tau)+$$

$$+iS^{c(-)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|\tau,\tau')G^{(+)}(\mathbf{k}_2';\mathbf{k}_2|\tau',\tau)-$$

$$-iS^{c(-)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|\tau,\tau')S^{c(+)}(\mathbf{k}_2';\mathbf{k}_2|\tau',\tau)+$$

$$+\int d^4y_1\int d^4y_1'\int d^4y_2\int d^4y_2' i\theta(\tau-\lambda y_1)i\theta(\tau-\lambda y_2)\times$$

$$\times\bar{u}^{(+)}(k_1;y_1)\bar{u}^{(-)}(k_2';y_2')R^{(4)}(y_1,y_2;y_1',y_2')u^{(-)}(y_1';k_1')\times$$

$$\times u^{(+)}(y_2;k_2)i\theta(\lambda y_1'-\tau')i\theta(\lambda y_2'-\tau'). \tag{8.4}$$

Входящие в это выражение одночастичные функции Грина были определены формулами (2.7) и (2.38). Выделяя теперь явно в виде δ-функции связь между начальными и конечными импульсами по формулам (4.5) и (4.7), получаем для двухчастичной функции Грина следующее выражение:

$$2\varepsilon_{k_2}2\varepsilon_{k_2'}\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\tau-\tau') = (2\pi)^3 2k_1^0\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_1')\times$$

$$\times\Big\{2\varepsilon_{k_1}2\varepsilon_{k_2'}e^{-i\varepsilon_{k_2}(\tau-\tau')}\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}_1|\tau-\tau')-$$

$$-2\varepsilon_{k_2}2\varepsilon_{k_2'}e^{-i\varepsilon_{k_1}(\tau-\tau')}\tilde{G}^{(+)}(\mathbf{k}_2|\tau'-\tau)\Big\}-$$

$$-(2\pi)^3 2k_1^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_1')2\varepsilon_{k_2'}e^{-i(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2})(\tau-\tau')}i\theta(\tau-\tau')+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p_1}\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p_1'}\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p_2}\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p_2'}\times$$

$$\times 2\pi\delta(\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2}-\varepsilon_{p_1'}-\varepsilon_{p_2'})\exp\{-i(\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2})(\tau-\tau')\}\times$$

$$\times\frac{\bar v^{(+)}(k_1)\bar v^{(-)}(k_2')\tilde R^{(4)}(p_1;p_1'|P)v^{(-)}(k_1')v^{(+)}(k_2)}{(\varepsilon_{k_1}-\varepsilon_{p_1}-i0)(\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_{p_2}-i0)(\varepsilon_{k_1'}-\varepsilon_{p_1'}-i0)(\varepsilon_{k_2'}-\varepsilon_{p_2'}-i0)},\tag{8.5}$$

где мы воспользовались формулой (7.40), обусловливающей следующую связь между импульсами:

$$\begin{aligned} p_1-k_1 &= (\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{k_1})\lambda; \\ p_1'-k_1' &= (\varepsilon_{p_1'}-\varepsilon_{k_1'})\lambda, \end{aligned}\tag{8.6}$$

а функция $\tilde R^{(4)}$ определяется равенствами (7.11), (7.23) и (7.29). Сделаем теперь фурье-преобразование по инвариантному времени функции Грина (8.5):

$$\tilde G^{(-)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} d(\tau-\tau')\exp\{i\varepsilon_P(\tau-\tau')\}\tilde G^{(-)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\tau-\tau')=$$

$$=(2\pi)^3 2k_1^0\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_1')\times$$

$$\times\left\{\frac{2\varepsilon_{k_1}}{2\varepsilon_{k_2}}\tilde G^{(-)}(\mathbf{k}_1|\varepsilon_P-\varepsilon_{k_2})-\tilde G^{(+)}(\mathbf{k}_2|-\varepsilon_P+\varepsilon_{k_1})\right\}-$$

$$-\frac{(2\pi)^3 2k_1^0\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_1')}{2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P-i0)}+\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p_1}\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p_1'}\times$$

$$\times\left[\frac{\bar{v}^{(+)}(k_1)\bar{v}^{(-)}(k_2')}{2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{k_1}+i0)(\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P-i0)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\tilde{R}^{(4)}(p_1;p_1'|P)v^{(-)}(k_1')v^{(+)}(k_2)}{2\varepsilon_{k_2'}(\varepsilon_{p_1'}-\varepsilon_{k_1'}+i0)(\varepsilon_{p_1'}+\varepsilon_{k_2'}-\varepsilon_P-i0)}\right], \qquad (8.7)$$

где $\tilde{G}^{(\pm)}(\mathbf{k}|\varepsilon)$ определяются формулами (2.36) и (2.42). С другой стороны, функция Грина (8.7) в силу (5.6) следующим образом связана с квазипотенциалом взаимодействия:

$$\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P)-\tilde{G}^{(0)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P)=\int d^3\omega_{\mathbf{q}_1}\int d^3\omega_{\mathbf{q}_1'}\times$$

$$\times\tilde{G}^{(0)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{q}_1|P,\varepsilon_P)V(\mathbf{q}_1;\mathbf{q}_1'|P,\varepsilon_P)\tilde{G}^{(-)}(\mathbf{q}_1';\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P). \qquad (8.8)$$

Поэтому сравнивая (8.7) и (8.8) в низшем приближении находим:

$$V(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P)=\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p_1}\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p_1'}\times$$

$$\times\left[\frac{(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P)\bar{v}^{(+)}(k_1)\bar{v}^{(-)}(k_2')}{2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{k_1}+i0)(\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P-i0)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\tilde{R}^{(4)}(p_1;p_1'|P)v^{(-)}(k_1')v^{(+)}(k_2)(\varepsilon_{k_1'}+\varepsilon_{k_2'}-\varepsilon_P)}{2\varepsilon_{k_2'}(\varepsilon_{p_1'}-\varepsilon_{k_1'}+i0)(\varepsilon_{p_1'}+\varepsilon_{k_2'}-\varepsilon_P-i0)}\right]. \qquad (8.9)$$

Используя теперь выражение (8.2) для S-матрицы, также в низшем приближении нетрудно вычислить по формуле (7.11), что

$$R^{(4)}(y_1,y_2;y_1',y_2')=-e^2\delta^{(4)}(y_1-y_1')\delta^{(4)}(y_2-y_2')\gamma^\mu D^c_{\mu\nu}(y_1-y_2)\gamma^\nu+$$

$$+e^2\delta^{(4)}(y_1'-y_2')\delta^{(4)}(y_1-y_2)\gamma^\mu D^c_{\mu\nu}(y_1-y_1')\gamma^\nu, \qquad (8.10)$$

или

$$\tilde{R}^{(4)}(p_1;p_1'|P) = -e^2\gamma^\mu D^c_{\mu\nu}(p_1-p_1')\gamma^\nu + e^2\gamma^\mu D^c_{\mu\nu}(P)\gamma^\nu, \quad (8.11)$$

где

$$D^c_{\mu\nu}(q) = \frac{g_{\mu\nu}}{q^2+i0} + (d-1)\frac{q_\mu q_\nu}{(q^2+i0)^2}, \quad (8.12)$$

причем в силу (8.6)

$$p_1 - p_1' = k_1 - k_1' + (\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_1'} - \varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_1'})\lambda. \quad (8.13)$$

Таким образом, квазипотенциал (8.9) принимает вид:

$$V(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P) = \frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p_1}\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p_1'}\times$$

$$\times\left\{\frac{\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P}{(\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{k_1}+i0)(\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P-i0)}\times\right.$$

$$\times\{\, -\frac{e^2\bar{v}^{(+)}(k_1)\gamma^\mu v^{(-)}(k_1')\bar{v}^{(-)}(k_2')\gamma_\mu v^{(+)}(k_2)}{(\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_1'})^2-q^2+i0}-$$

$$-(d-1)\frac{[(\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_1'})^2-(\varepsilon_{k_1}-\varepsilon_{k_1'})^2]}{[(\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_1'})^2-q^2+i0]^2}\times$$

$$\times e^2\bar{v}^{(+)}(k_1)\hat{\lambda}v^{(-)}(k_1')\bar{v}^{(-)}(k_2')\hat{\lambda}v^{(+)}(k_2)+$$

$$+\frac{1}{P^2}e^2\bar{v}^{(+)}(k_1)\gamma^\mu v^{(+)}(k_2)\bar{v}^{(-)}(k_2')\gamma_\mu v^{(-)}(k_1')-$$

$$-\frac{d-1}{P^2}e^2\bar{v}^{(+)}(k_1)\hat{\lambda}v^{(+)}(k_2)\bar{v}^{(-)}(k_2')\hat{\lambda}v3^{(-)}(k_1')\,\}\times$$

$$\times \frac{\varepsilon_{k_1'} + \varepsilon_{k_2'} - \varepsilon_P}{(\varepsilon_{p_1'} - \varepsilon_{k_1'} + i0)(\varepsilon_{p_1'} + \varepsilon_{k_2'} - \varepsilon_P - i0)} \Bigg\}, \tag{8.14}$$

где $q = \sqrt{(\varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{k_1'})^2 - (k_1 - k_1')^2}$.

Полюсные знаменатели в этом выражении можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{(\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_1'})^2 - q^2 + i0} =$$

$$= \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_1'} - q + i0} - \frac{1}{\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_1'} + q - i0} \right); \tag{8.15}$$

$$\frac{1}{[(\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_1'})^2 - q^2 + i0]^2} =$$

$$= \frac{1}{4q^3} \left[\frac{\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_1'} + 2q}{(\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_1'} + q - i0)^2} - \frac{\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_1'} - 2q}{(\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_1'} - q + i0)^2} \right]. \tag{8.16}$$

Тогда интегралы в (8.14) можно легко вычислить методом вычетов в полюсах, и окончательно получим:

$$V(\mathbf{k}_1; \mathbf{k}_1' | P, \varepsilon_P) = -\frac{e^2 \bar{v}^{(+)}(k_1) \gamma^\mu v^{(-)}(k_1') \bar{v}^{(-)}(k_2') \gamma_\mu v^{(+)}(k_2)}{q(\sqrt{P^2} - \varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{k_1'} - q + i0)} -$$

$$-(d-1)(\sqrt{P^2} - 2\varepsilon_{k_1})(\sqrt{P^2} - 2\varepsilon_{k_1'})(\sqrt{P^2} - \varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{k_1'} - 2q) \times$$

$$\times \frac{e^2 \bar{v}^{(+)}(k_1) \hat{\lambda} v^{(-)}(k_1') \bar{v}^{(-)}(k_2') \hat{\lambda} v^{(+)}(k_2)}{2q^3 (\sqrt{P^2} - \varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{k_1'} - q + i0)^2} +$$

$$+ \frac{e^2}{P^2} \bar{v}^{(+)}(k_1) \gamma^\mu v^{(+)}(k_2) \bar{v}^{(-)}(k_2') \gamma_\mu v^{(-)}(k_1') +$$

$$+\frac{e^2(d-1)}{P^2}\bar{v}^{(+)}(k_1)\hat{\lambda}v^{(+)}(k_2)\bar{v}^{(-)}(k_2')\hat{\lambda}v^{(-)}(k_1'). \qquad (8.17)$$

Мы учли здесь, что $\lambda = P/\sqrt{P^2}$, т. е. $\varepsilon_P = \sqrt{P^2}$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 2\varepsilon_{k_1}\lambda; \\ k_1' + k_2' &= 2\varepsilon_{k_1'}\lambda. \end{aligned} \qquad (8.18)$$

В фейнмановской калибровке $d = 1$ квазипотенциал электромагнитного взаимодействия фермиона и антифермиона (например, электрона и позитрона) в приближении однофотонного обмена принимает достаточно простой вид:

$$V(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P) = \frac{e^2\bar{v}^{(+)}(k_1)\gamma^\mu v^{(-)}(k_1')\bar{v}^{(-)}(k_2')\gamma_\mu v^{(+)}(k_2)}{q(q-\sqrt{P^2}+\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_1'}-i0)} +$$

$$+\frac{e^2}{P^2}\bar{v}^{(+)}(k_1)\gamma^\mu v^{(+)}(k_2)\bar{v}^{(-)}(k_2')\gamma_\mu v^{(-)}(k_1'). \qquad (8.19)$$

Здесь, очевидно, первое слагаемое отвечает обмену фотоном в аннигиляционном канале, а второе слагаемое – обмену в прямом канале рассеяния. Характерной особенностью этого квазипотенциала является явная и нетривиальная зависимость от полной энергии системы $\sqrt{P^2}$. Подставив квазипотенциал (8.19) в уравнение (5.7), мы могли бы приступить к решению проблемы вычисления спектра связанной системы двух заряженных релятивистских частиц. Однако, уравнение (5.7) включает в себя все возможные спиновые состояния в данной системе, и поэтому в следующем разделе мы попытаемся получить из него уравнение для конкретного, а именно, псевдоскалярного состояния.

9. Квазипотенциальное уравнение для волновой функции

Можно показать, что наиболее общий вид одновременной волновой функции псевдоскалярного связанного состояния фермиона и антифермиона следующий:

$$\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP}(\mathbf{k}_1) = \frac{\bar{v}^{(+)}(k_1)\gamma^5 v^{(+)}(k_2)}{2\varepsilon_{k_2}}\varphi_P(\mathbf{k}_1), \tag{9.1}$$

где $\varphi_P(\mathbf{k}_1)$ – скалярная часть волновой функции. Спинорную структуру квазипотенциала в ряде моделей квантовой теории поля можно представить в виде:

$$V(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,\varepsilon_P) =$$
$$= \bar{v}^{(+)}(k_1)\gamma_\mu v^{(-)}(k'_1)\bar{v}^{(-)}(k'_2)\gamma^\mu v^{(+)}(k_2)V_0(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,\varepsilon_P), \tag{9.2}$$

что соответсвует ток-токовому типу взаимодействия с произвольным пока скалярным ядром $V_0(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,\varepsilon_P)$. Заметим, что первое слагаемое в квазипотенциале электромагнитного взаимодействия (8.19) согласуется с выбранной нами формой (9.2). Подстановка (9.2) и (9.1) в квазипотенциальное уравнение (5.7) после несложных преобразований дает:

$$2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P)\frac{\bar{v}^{(+)}(k_1)\gamma^5 v^{(+)}(k_2)}{2\varepsilon_{k_2}}\varphi_P(\mathbf{k}_1) =$$
$$= 2\int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}\bar{v}^{(+)}(k_1)\left[(k'_1+k'_2)^2 - m(\hat{k}'_1+\hat{k}'_2)+2m^2\right]\times$$

$$\times\gamma^5 v^{(+)}(k_2)V_0(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P)\frac{\varphi_P(\mathbf{k}_1')}{2\varepsilon_{k_2'}}. \tag{9.3}$$

Умножая это уравнение на $\bar{v}^{(-)}(k_2)\gamma^5 v^{(-)}(k_1)$, суммируя по поляризациям и вычисляя следы γ-матриц, получаем:

$$2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P)\varphi_P(\mathbf{k}_1)\frac{(k_1+k_2)^2}{2\varepsilon_{k_2}}=$$

$$=2\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1'}\Big\{\Big[(k_1+k_2)^2(k_1'+k_2')^2-2m^2(k_1+k_2)(k_1'+k_2')\Big]\times$$

$$\times V_0(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P)\frac{\varphi_P(\mathbf{k}_1')}{2\varepsilon_{k_2'}}\Big\}. \tag{9.4}$$

Учитывая соотношение (4.6) между 4-импульсами, можно записать это уравнение в следующей форме:

$$2\varepsilon_{k_2}(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P)\varphi_P(\mathbf{k}_1)\frac{(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2})^2-\varepsilon_P^2+M^2}{2\varepsilon_{k_2}}=2\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1'}\times$$

$$\times\Big[\Big\{\ \Big[(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2})^2-\varepsilon_P^2+M^2\Big]\Big[(\varepsilon_{k_1'}+\varepsilon_{k_2'})^2-\varepsilon_P^2+M^2\Big]-$$

$$-2m^2\Big[(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2})(\varepsilon_{k_1'}+\varepsilon_{k_2'})-\varepsilon_P^2+M^2\Big]\ \Big\}\times$$

$$\times V_0(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_1'|P,\varepsilon_P)\frac{\varphi_P(\mathbf{k}_1')}{2\varepsilon_{k_2'}}\Big]. \tag{9.5}$$

Теперь видно, что наиболее простой вид это уравнение приобретает, когда $\lambda=P/M$. В этом случае $\varepsilon_P=M$ и из (4.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} k_1+k_2 &= (\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2})\lambda=2\varepsilon_{k_1}\lambda=2\varepsilon_{k_2}\lambda;\\ k_1'+k_2' &= (\varepsilon_{k_1'}+\varepsilon_{k_2'})\lambda=2\varepsilon_{k_1'}\lambda=2\varepsilon_{k_2'}\lambda, \end{aligned} \tag{9.6}$$

поэтому уравнение (9.5) принимает следующий вид:

$$2\varepsilon_{k_1}(2\varepsilon_{k_1} - M)\varphi_P(\mathbf{k}_1) =$$
$$= 4\int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}(2\varepsilon_{k_1}\varepsilon_{k'_1} - m^2)V_0(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,M)\varphi_P(\mathbf{k}'_1). \tag{9.7}$$

Не представляет труда теперь, используя вид волновой функции (9.1) и соотношение (5.12), найти условие нормировки для скалярной волновой функции $\varphi_P(\mathbf{k}_1)$:

$$2M = \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1}\, 2\varepsilon_{k_1}|\varphi_P(\mathbf{k}_1)|^2 + 4\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1}\int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}\times$$
$$\times\Big[(2\varepsilon_{k_1}\varepsilon_{k'_1} - m^2)\overset{*}{\varphi}_P(\mathbf{k}_1)\frac{\partial}{\partial M}V_0(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,M)\varphi_P(\mathbf{k}'_1)\Big]. \tag{9.8}$$

Таким образом, если нам известен квазипотенциал $V_0(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,M)$, то решая уравнение (9.7) с учетом условия нормировки (9.8), мы можем найти волновые функции и значения масс псевдоскалярных двухчастичных связанных состояний. При соответствующем выборе квазипотенциала, описывающего взаимодействие кварка и антикварка, можно использовать уравнение (9.7) для расчета спектра масс псевдоскалярных мезонов.

Рассмотрим теперь более детально псевдоскалярное состояние системы электрона и позитрона, взаимодействие которых описывается квазипотенциалом (8.19). Нетрудно показать, что для такого состояния второе слагаемое в квазипотенциале (8.19) не дает вклада во взаимодействие в силу сохранения спина, поэтому волновая функция данного состояния будет подчиняться уравнению (9.7), которое в системе покоя $\mathbf{P} = 0$ имеет следующий вид:

$$2k^0(2k^0 - M)\varphi_M(\mathbf{k}) =$$
$$= 16\pi\alpha\int d^3\omega_{\mathbf{k}'}\frac{2k^0k'^0 - m^2}{|\mathbf{q}|(|\mathbf{q}| - M + k^0 + k'^0 - i0)}\varphi_M(\mathbf{k}'), \tag{9.9}$$

где $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}$ – импульс электрона. Решение этого уравнения на собственные значения M будет определять релятивистский спектр масс псевдоскалярного связанного состояния электрона и позитрона.

Таким образом, мы видим, что в качестве квазипотенциала взаимодействия релятивистских заряженных частиц выступает следующая функция:

$$V_0(\mathbf{k};\mathbf{k}'|P,\varepsilon_P) = \frac{4\pi\alpha}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|(|\mathbf{k}-\mathbf{k}'| - \sqrt{P^2} + k^0 + k'^0 - i0)}. \tag{9.10}$$

Она представляет собой релятивистское обобщение кулоновского потенциала, полученное в низшем порядке теории возмущений в рамках квантовой электродинамики. Обратим внимание на свойства квазипотенциала (9.10), которые отличают его от обычного кулоновского потенциала, используемого в классической физике или нерелятивистской квантовой механике для описания взаимодействия заряженных частиц.

Во-первых, квазипотенциал (9.10) нелокален, т. е. зависит не только от разности $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$, но и непосредственно от импульсов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$. Во-вторых, мы видим, что уже в низшем приближении квазипотенциал (9.10) в случае положительной энергии связи $E = M - 2m > 0$ имеет δ-образную мнимую часть:

$$\mathrm{Im} V_0(\mathbf{k};\mathbf{k}'|P,\varepsilon_P) = \frac{4\pi^2\alpha}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|}\delta(|\mathbf{k}-\mathbf{k}'| - \sqrt{P^2} + k^0 + k'^0). \tag{9.11}$$

Наконец, квазипотенциал (9.10) явно зависит от полной инвариантной энергии рассматриваемой системы $\sqrt{P^2}$. Последнее обстоятельство существенно меняет постановку задачи на собственные значения для интегрального уравнения (9.9), поскольку собственное значение массы M непосредственно входит в ядро этого уравнения.

Для того, чтобы более наглядно представить себе характер взаимодействия, описываемого квазипотенциалом (9.10), перейдем в этом выражении к нерелятивистскому пределу.

Обычно в этом пределе полагают, что импульсы частиц много меньше их масс $|\mathbf{k}| \ll m$ и энергия связи также много меньше массы связанного состояния $|E| \ll M$. Мы же ограничимся здесь только первым из этих условий. В результате получим для квазипотенциала:

$$V_0(\mathbf{k};\mathbf{k}'|P,M) = \frac{4\pi\alpha}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|(|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|-E-i0)}. \tag{9.12}$$

Таким образом, мы сохраняем возможность существования связанных систем с большими дефектами массы (например, порядка самой массы), что нельзя заведомо исключить в релятивистских системах.

Обратим внимание на то, что в результате совершенного нами предельного перехода квазипотенциал взаимодействия стал зависеть только от разности импульсов $\mathbf{k}-\mathbf{k}'$, т. е. стал локальным, и поэтому можно попытаться описать соответствующую ему пространственную картину потенциального взаимодействия. Но прежде, чем перейти к этому, отметим, что при $E > 0$ квазипотенциал (9.12) имеет сингулярность при $|\mathbf{k}-\mathbf{k}'| = E$, а в случае малых энергий связи в пределе $E \to 0$ переходит в обычный кулоновский потенциал (следует иметь в виду, что знак квазипотенциала по определению противоположен знаку классического потенциала):

$$V_0(\mathbf{k};\mathbf{k}'|P,M) = \frac{4\pi\alpha}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}. \tag{9.13}$$

Уравнение (9.9) переходит в этом пределе в обычное уравнение Шредингера в импульсном пространстве:

$$\left(\frac{\mathbf{k}^2}{m} - E\right)\varphi_M(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{k}'\,\frac{4\pi\alpha}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}\,\varphi_M(\mathbf{k}'). \tag{9.14}$$

Итак, переведем квазипотенциал (9.12) помощью преобразования Фурье:

$$V_0(\mathbf{x}|E) = \frac{4\pi\alpha}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{q}\,\frac{\exp\{i\mathbf{q}\mathbf{x}\}}{|\mathbf{q}|(|\mathbf{q}| - E - i0)}. \tag{9.15}$$

В области отрицательных энергий связи $E = -|E|$ интеграл (9.15) дает зависящий от энергии квазипотенциал взаимодействия в координатном пространстве:

$$V_0(\mathbf{x}|E) = -\frac{2\alpha}{\pi|\mathbf{x}|}[\mathrm{ci}|E\mathbf{x}|\sin|E\mathbf{x}| + \mathrm{si}|E\mathbf{x}|\cos|E\mathbf{x}|]. \tag{9.16}$$

Несмотря на экзотический вид этого квазипотенциала, легко проверить, что он представляет собой монотонно убывающую положительную функцию. Интересно исследовать асимптотическое поведение этого квазипотенциала. В области малых расстояний $|E\mathbf{x}| \ll 1$ имеем:

$$V_0(\mathbf{x}|E) = \frac{\alpha}{|\mathbf{x}|}\left[1 + \frac{2}{\pi}|E\mathbf{x}|(\ln\gamma|E\mathbf{x}| - 1) + \ldots\right], \tag{9.17}$$

т. е. квазипотенциал ведет себя почти кулоновским образом. В области больших расстояний $|E\mathbf{x}| \gg 1$:

$$V_0(\mathbf{x}|E) = \frac{2\alpha}{\pi|E|\mathbf{x}^2}\left[1 - \frac{2}{E^2\mathbf{x}^2} + \ldots\right], \tag{9.18}$$

т. е. квазипотенциал убывает как $1/\mathbf{x}^2$ с расстоянием, что можно трактовать как проявление некоторой экранировки, возникающей в релятивистской задаче на фоне кулоновского потенциала.

В случае положительной энергии $E > 0$ интеграл (9.15) дает:

$$V_0(\mathbf{x}|E) = \frac{2\alpha}{\pi|\mathbf{x}|}[\mathrm{ci}E|\mathbf{x}|\sin E|\mathbf{x}| + \mathrm{si}E|\mathbf{x}|\cos E|\mathbf{x}| + \pi\exp\{iE|\mathbf{x}|\}], \tag{9.19}$$

и мы приходим к выводу, что квазипотенциал становится комплексным и осциллирующим, причем амплитуда осцилляций медленно убывает по кулоновскому закону, а частота их определяется энергией связи E.

В области малых расстояний квазипотенциал (9.19) ведет себя по-прежнему почти кулоновским образом:

$$V_0(\mathbf{x}|E) = \frac{\alpha}{|\mathbf{x}|}\left[1 + 2iE|\mathbf{x}| - \frac{2}{\pi}E|\mathbf{x}|(\ln\gamma E|\mathbf{x}| - 1) + \ldots\right], \tag{9.20}$$

а в области $E|\mathbf{x}| \gg 1$ имеем:

$$V_0(\mathbf{x}|E) = \frac{2\alpha}{|\mathbf{x}|}\exp\{iE|\mathbf{x}|\} + \ldots \tag{9.21}$$

Легко понять, что осциллирующий характер квазипотенциала (9.21) связан с релятивистскими эффектами, если записать аргумент осциллирующей экспоненты в естественных единицах: $E|\mathbf{x}|/\hbar c$, куда явным образом входит скорость света c.

В заключение этого параграфа заметим, что картина рассеяния на осциллирующих квазипотенциалах, к тому же зависящих от энергии, может существенно отличаться от привычной нам картины потенциального рассеяния, что, в частности, проявляется в существовании дискретных уровней, погруженных в непрерывный спектр.

10. Релятивистское конфигурационное пространство

Запишем квазипотенциальное уравнение (9.7) в системе покоя псевдоскалярного связанного состояния:

$$2k^0(2k^0 - M)\varphi_M(\mathbf{k}) =$$
$$= 4\int d^3\omega_{\mathbf{k}'}(2k^0k'^0 - m^2)V_0(\mathbf{k};\mathbf{k}'|P,M)\varphi_M(\mathbf{k}'). \tag{10.1}$$

Переход к обычному конфигурационному пространству с помощью трехмерного преобразования Фурье для этого трехмерного релятивистского уравнения, очевидно, теряет свой смысл, поскольку интегрирование в правой части проводится по релятивистски инвариантному объему $d^3\omega_{\mathbf{k}}$, относительно которого обычные плоские волны не обладают свойством ортогональности:

$$\int d^3\omega_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = \frac{m^2}{(2\pi)^2}\ \frac{K_1(m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \tag{10.2}$$

где K_1 – функция Макдональда второго рода. Поэтому в релятивистском случае в качестве "плоских"волн выбирают функции, которые реализуют представление группы Лоренца как группы движений в пространстве Лобачевского на массовом гиперболоиде частицы $k^{02} - \mathbf{k}^2 = m^2$:

$$\xi(\mathbf{r};\mathbf{k}) = \left(\frac{kn}{m}\right)^{-1-imr}, \tag{10.3}$$

где $n = (1, \mathbf{r}/r)$ – светоподобный 4-вектор. Нетрудно показать, что эти функции обладают необходимыми свойствами полноты и ортогональности:

$$2m \int d^3\omega_{\mathbf{k}} \xi(\mathbf{r}; \mathbf{k}) \overset{*}{\xi} (\mathbf{k}; \mathbf{r}') = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \tag{10.4}$$

$$2m \int d^3\mathbf{r} \overset{*}{\xi} (\mathbf{k}; \mathbf{r}) \xi(\mathbf{r}; \mathbf{k}') = (2\pi)^3 2k^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{10.5}$$

Разложение волновой функции по "плоским"волнам ξ имеет следующий вид:

$$\varphi_M(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r} \overset{*}{\xi} (\mathbf{k}; \mathbf{r}) \varphi_M(\mathbf{r}), \tag{10.6}$$

и обратное преобразование:

$$\varphi_M(\mathbf{r}) = 2m \int d^3\omega_{\mathbf{k}} \xi(\mathbf{r}; \mathbf{k}) \varphi_M(\mathbf{k}). \tag{10.7}$$

Аналогичное разложение можно записать и для квазипотенциала:

$$V_0(\mathbf{k}; \mathbf{k}'|P, M)|_{\mathbf{P}=0} =$$
$$= \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \overset{*}{\xi} (\mathbf{k}; \mathbf{r}) V_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}'|M) \xi(\mathbf{r}'; \mathbf{k}'). \tag{10.8}$$

Для того, чтобы записать квазипотенциальное уравнение (10.1) в релятивистском конфигурационном пространстве, необходимо построить в нем оператор свободного гамильтониана, удовлетворяющий уравнению:

$$\hat{H}^{(0)}_{\mathbf{r}} \xi(\mathbf{r}; \mathbf{k}) = 2k^0 \xi(\mathbf{r}; \mathbf{k}). \tag{10.9}$$

Этот дифференциальный оператор был найден в свое время и имеет следующий вид в сферических координатах:

$$\hat{H}^{(0)}_{\mathbf{r}} = 2m\left[\mathrm{ch} i\lambda\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i\lambda}{r}\mathrm{sh} i\lambda\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda^2}{2r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\exp\left\{i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right\}\right], \tag{10.10}$$

где $\lambda = m^{-1}$ – комптоновская длина волны фермиона. В результате квазипотенциальное уравнение в релятивистском конфигурационном пространстве имеет вид:

$$\hat{H}^{(0)}_{\mathbf{r}}\left(\hat{H}^{(0)}_{\mathbf{r}} - M\right)\varphi_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{m}\hat{H}^{(0)}_{\mathbf{r}}\int d^3\mathbf{r}' V_0(\mathbf{r};\mathbf{r}'|M)\hat{H}^{(0)}_{\mathbf{r}'}\varphi_M(\mathbf{r}') -$$
$$-2m\int d^3\mathbf{r}' V_0(\mathbf{r};\mathbf{r}'|M)\varphi_M(\mathbf{r}'). \tag{10.11}$$

Таким образом, мы видим, что это уравнение оказывается конечно-разностным, поскольку действие дифференциальных операторов, входящих в выражение для гамильтониана (10.10), понимается в смысле конечных сдвигов:

$$\exp\left\{i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right\} f(r) = f(r + i\lambda); \tag{10.12}$$

$$\mathrm{ch} i\lambda\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{2}\left(\exp\left\{i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right\} + \exp\left\{-i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right\}\right); \tag{10.13}$$

$$\mathrm{sh} i\lambda\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{2}\left(\exp\left\{i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right\} - \exp\left\{-i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right\}\right). \tag{10.14}$$

В рамках возникающей здесь конечно-разностной схемы мы должны вместо обычной производной определить оператор конечно-разностного дифференцирования:

$$\Delta_r(\lambda) = \frac{1 - \exp\left\{-i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right\}}{i\lambda}, \tag{10.15}$$

т.е.

$$\Delta_r(\lambda)f(r) = \frac{f(r) - f(r - i\lambda)}{i\lambda}, \tag{10.16}$$

который при $\lambda \to 0$ переходит в обычную производную:

$$\lim_{\lambda \to 0} \Delta_r(\lambda) = \frac{\partial}{\partial r}. \tag{10.17}$$

В частности, в рамках данной техники можно определить обобщенную степенную функцию условием:

$$\Delta_r(\lambda) r^{(\alpha)} = \alpha r^{(\alpha-1)}, \tag{10.18}$$

т. е. как и в случае обычного дифференцирования. Для целого $\alpha = n$, например, имеем:

$$r^{(n)} = r(r + i\lambda)(r + 2i\lambda)...[r + i(n-1)\lambda]. \tag{10.19}$$

Мы воспользуемся приведенными здесь формулами, чтобы несколько упростить уравнение (10.11). Нетрудно проверить выполнение следующего равенства:

$$\hat{H}^{(0)}_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) = \frac{2m}{r}\left[\mathrm{ch} i\lambda\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda^2}{2r^{(2)}}\Delta_{\theta,\varphi}\exp\left\{i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right\}\right] r f(\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{1}{r}\hat{\mathcal{H}}^{(0)}_{\mathbf{r}} r f(\mathbf{r}), \tag{10.20}$$

и мы видим, что оператор $\hat{\mathcal{H}}^{(0)}_{\mathbf{r}}$ выглядит значительно компактней, чем $\hat{H}^{(0)}_{\mathbf{r}}$. Поэтому мы перепишем уравнение (10.11), используя этот новый оператор свободного гамильтониана:

$$\hat{\mathcal{H}}^{(0)}_{\mathbf{r}}\left(\hat{\mathcal{H}}^{(0)}_{\mathbf{r}} - M\right)\bar{\varphi}_M(\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{1}{m}\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{r}}^{(0)}\int d^3\mathbf{r}'\, rV_0(\mathbf{r};\mathbf{r}'|M)r'^{-1}\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{r}'}^{(0)}\varphi_M(\mathbf{r}')-$$

$$-2m\int d^3\mathbf{r}'\, rV_0(\mathbf{r};\mathbf{r}'|M)r'^{-1}\bar{\varphi}_M(\mathbf{r}'), \tag{10.21}$$

где мы переопределили также волновую функцию:

$$\bar{\varphi}_M(\mathbf{r}) = r\varphi_M(\mathbf{r}). \tag{10.22}$$

Нетрудно показать, что условие нормировки волновой функции (9.8) в координатном пространстве в случае не зависящего от энергии квазипотенциала выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2m}\int dr\int d\Omega_{\mathbf{r}}\ \overset{*}{\bar{\varphi}}_M(\mathbf{r})\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{r}}^{(0)}\bar{\varphi}_M(\mathbf{r}) = M. \tag{10.23}$$

Рассмотрим теперь локальный квазипотенциал:

$$V_0(\mathbf{r};\mathbf{r}'|M) = V_0(r|M)\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{10.24}$$

где $V_0(r|M)$ представляет собой аналог локального центрально-симметричного потенциала в релятивистском конфигурационном пространстве и зависит от полной энергии связанного состояния M. Подставляя (10.24) в формулу (10.8), получаем:

$$V_0(\mathbf{k};\mathbf{k}'|M) = \int d^3\mathbf{r}\ \overset{*}{\xi}(\mathbf{k};\mathbf{r})V_0(r|M)\xi(\mathbf{r};\mathbf{k}'). \tag{10.25}$$

Используя теперь теорему сложения

$$\int d\Omega_{\mathbf{r}}\ \overset{*}{\xi}(\mathbf{k};\mathbf{r})\xi(\mathbf{r};\mathbf{k}') = \int d\Omega_{\mathbf{r}}\ \overset{*}{\xi}(\mathbf{k}(-)\mathbf{k}';\mathbf{r}), \tag{10.26}$$

где $\mathbf{k}(-)\mathbf{k}'$ – разность двух векторов в искривленном пространстве Лобачевского, реализованном на массовом гиперболоиде частицы, которая задается, как известно, векторным преобразованием Лоренца:

$$\mathbf{k}(-)\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}'}{m}\left(k^0 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{k'^0 + m}\right), \tag{10.27}$$

мы получаем:

$$V_0(\mathbf{q}|M) = \int d^3\mathbf{r} \overset{*}{\xi}(\mathbf{q};\mathbf{r}) V_0(r|M), \tag{10.28}$$

т. е. квазипотенциал в этом случае зависит от модуля "кривой"разности $\mathbf{q} = \mathbf{k}(-)\mathbf{k}'$, и в этом смысле может называться локальным релятивистским потенциалом.

Нетрудно теперь записать квазипотенциальное уравнение (10.21) для локального квазипотенциала (10.24):

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{r}}^{(0)}\left(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{r}}^{(0)} - M\right)\bar{\varphi}_M(\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{1}{m}\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{r}}^{(0)} V_0(r|M)\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{r}}^{(0)}\bar{\varphi}_M(\mathbf{r}) - 2mV_0(r|M)\bar{\varphi}_M(\mathbf{r}). \tag{10.29}$$

Ясно, что появление конечно-разностных операторов в уравнении (10.29) связано с чисто релятивистскими эффектами: с релятивистским законом дисперсии (связь энергии и импульса частицы) и с нелокальностью ядра квазипотенциального уравнения (10.1). В свое время необходимость введения конечно-разностных операций породила эвристическую идею о квантовании релятивистского конфигурационного пространства. Однако, эта идея не получила дальнейшего глубокого развития.

Попытаемся проследить выполнение принципа соответствия уравнения (10.29) в нерелятивистском пределе ($\lambda = m^{-1} \to 0$) обычной квантовомеханической картине. Нетрудно убедиться, что в этом пределе функция $\xi(\mathbf{r};\mathbf{k})$ переходит в обычную плоскую волну:

$$\lim_{m\to\infty} \xi(\mathbf{r};\mathbf{k}) = \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r}\}, \tag{10.30}$$

и радиус-вектор $\mathbf{r}$ играет роль радиуса-вектора в обычном нерелятивистском координатном пространстве. Далее мы можем произвести разложение свободного гамильтониана по степеням λ^2:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{r}}^{(0)} = 2m\left[1 - \frac{1}{2}\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\lambda^2}{2r^2}\Delta_{\theta,\varphi} + \mathcal{O}(\lambda^4)\right]. \tag{10.31}$$

Подставляя это разложение в уравнение (10.29) и оставляя только члены порядка λ^2, а также предполагая малость энергии связи и силы взаимодействия, мы приходим к уравнению ($E = M - 2m$):

$$\left(-\frac{1}{m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{mr^2}\Delta_{\theta,\varphi} - E\right)\bar{\varphi}_M(\mathbf{r}) = V_0(r|2m)\bar{\varphi}_M(\mathbf{r}), \tag{10.32}$$

которое в точности совпадает с нерелятивистским уравнением Шредингера.

В предыдущем разделе мы построили квазипотенциал взаимодействия заряженных частиц в низшем порядке теории возмущений в рамках квантовой электродинамики. Однако, можно надеяться, что этот квазипотенциал адекватно описывает взаимодействие только в тех случаях, когда константа связи мала. Если же к примеру мы будем описывать псевдоскалярный мезон как связанное состояние кварка и антикварка, то такое построение уже не будет корректным, поскольку в этом случае мы имеем дело с сильным взаимодействием. Поэтому для построения квазипотенциала кварк-кваркового взаимодействия мы пойдем несколько эвристическим путем. Прежде всего мы будем опираться на аналогию квазипотенциала и обычного потенциала, а также явную схожесть трехмерного релятивистского описания взаимодействия, основанного на квазипотенциальном уравнении, с описанием взаимодействия в нерелятивистской квантовой механике.

В теории сильных взаимодействий – квантовой хромодинамике – взаимодействие между кварками осуществляется путем обмена безмассовым глюоном, и поэтому естественно предположить, что квазипотенциал $V_0(r|M)$ в релятивистском конфигурационном пространстве имеет кулоновский вид:

$$V_0(r|M) = \frac{\alpha_s}{r}, \tag{10.33}$$

где константа связи, вообще говоря, может зависеть от энергии. Подставляя этот квазипотенциал в преобразование (10.28), получаем в импульсном пространстве:

$$V_0(\mathbf{q}|M) = \frac{4\pi\alpha_s}{m|\mathbf{q}|\ln\left(\sqrt{1+\mathbf{q}^2/m^2}+|\mathbf{q}|/m\right)}, \tag{10.34}$$

причем обычный квадрат передачи 4-импульса $(k-k')^2 = -Q^2$ следующим образом связан с квадратом разности трехмерных импульсов на массовом гиперболоиде (10.27):

$$\mathbf{q}^2 = Q^2\left(1+\frac{Q^2}{4m^2}\right). \tag{10.35}$$

Нетрудно видеть, что в области малых Q^2 (на больших расстояниях) квазипотенциал (10.34) принимает вид обычного кулоновского потенциала в импульсном пространстве:

$$V_0(\mathbf{q}|M)\big|_{Q^2\to 0} \approx \frac{4\pi\alpha_s}{Q^2}, \tag{10.36}$$

однако, надо иметь в виду, что взаимодействие кварков на больших расстояниях не может описываться одним только квазипотенциалом одноглюонного обмена (10.33), а требуется дополнение его растущим квазипотенциалом, обеспечивающим удержание кварков. Заметим, что приведенная нами асимптотика квазипотенциала (10.36) соответствует также нерелятивистскому пределу.

Характер поведения квазипотенциала существенно меняется в области малых расстояний или при $Q^2 \to \infty$:

$$V_0(\mathbf{q}|M)\big|_{Q^2\to \infty} \approx \frac{8\pi\alpha_s}{Q^2 \ln\left(Q^2/m^2\right)}. \tag{10.37}$$

Мы видим, что асимптотика квазипотенциала в этом случае согласуется с известным асимптотически свободным поведением одноглюонного вклада в квантовой хромодинамике, хотя мы не делали никаких предположений об экзотической зависимости α_s от передачи импульса, т. е. в данном подходе не возникает необходимости введения "бегущей"константы связи. При этом оказывается, что роль хорошо известной в КХД масштабной константы здесь играет просто масса кварка. Для простоты мы не рассматривали здесь цветовых степеней свободы, присущих КХД, однако, можно показать, что их введение не изменило бы качественно наш вывод о том, что квантово-хромодинамическое взаимодействие на малых расстояниях воспроизводится обычным кулоновским потенциалом, но – в релятивистском конфигурационном пространстве.

В рамках изложенного выше эвристического метода рассмотрим теперь два возможных релятивистских обобщения нерелятивистского кулоновского потенциала для взаимодействия двух заряженных частиц:

$$V_0(\mathbf{k}-\mathbf{k}'|M) = \frac{4\pi\alpha}{\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)^2}. \tag{10.38}$$

Первое очевидное обобщение состоит в замене $(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2$ на Q^2, что обеспечивает как релятивистскую инвариантность, так и вполне естественное продолжение за энергетическую поверхность потенциала (10.38):

$$V_0(\mathbf{q}|M) = \frac{4\pi\alpha}{Q^2} = \frac{4\pi\alpha}{2m\left(\sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}-m\right)}. \qquad (10.39)$$

Используя преобразование, обратное (10.28), в релятивистском конфигурационном пространстве получаем:

$$V_0(r|M) = \frac{\alpha \mathrm{cth}(\pi m r)}{r}. \qquad (10.40)$$

Второе обобщение состоит в непосредственной замене в формуле (10.38) обычной разности импульсов $\mathbf{k}-\mathbf{k}'$ на "кривую"разность $\mathbf{q}$:

$$V_0(\mathbf{q}|M) = \frac{4\pi\alpha}{\mathbf{q}^2} = \frac{4\pi\alpha}{Q^2\left(1+Q^2/4m^2\right)}. \qquad (10.41)$$

В релятивистском конфигурационном пространстве получаем:

$$V_0(r|M) = \frac{\alpha \mathrm{th}(\pi m r/2)}{r}. \qquad (10.42)$$

Отметим, что в импульсном пространстве рассмотренные релятивистские обобщения кулоновского потенциала имеют существенно разную асимптотику при $Q^2 \to \infty$. В координатном пространстве в области больших расстояний они совпадают между собой и с кулоновским потенциалом, однако вблизи начала координат ведут себя существенно по-разному: в то время как квазипотенциал (10.40) имеет полюс второго порядка при $r \to 0$, квазипотенциал (10.42) вовсе не имеет сингулярности.

11. Квазипотенциальное уравнение для парциальных волн

Разложим волновую функцию псевдоскалярного связанного состояния фермиона и антифермиона $\bar{\varphi}_{_M}(\mathbf{r})$ по полиномам Лежандра:

$$\bar{\varphi}_{_M}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\varphi_{_M}^{(l)}(r)P_l(\cos\theta_{\mathbf{r}}), \tag{11.1}$$

тогда парциальные волновые функции $\varphi_M^{(l)}(r)$ в силу (10.29) удовлетворяют радиальному уравнению:

$$\hat{\mathcal{H}}_r^{(l)}\left(\hat{\mathcal{H}}_r^{(l)} - M\right)\varphi_M^{(l)}(r) =$$

$$= \frac{1}{m}\hat{\mathcal{H}}_r^{(l)}V_0(r|M)\hat{\mathcal{H}}_r^{(l)}\varphi_M^{(l)}(r) - 2mV_0(r|M)\varphi_M^{(l)}(r), \tag{11.2}$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_r^{(l)} = 2m\left[\mathrm{ch}i\lambda\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda^2 l(l+1)}{2r^{(2)}}\exp\left\{i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right\}\right]. \tag{11.3}$$

Разложение релятивистской "плоской"волны по сферическим функциям имеет вид:

$$\overset{*}{\xi}(\mathbf{k};\mathbf{r}) = \frac{1}{kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\overset{*}{\xi}{}^{(l)}(\chi;r)P_l(\cos\theta) =$$

$$= \frac{1}{kr} \sum_{l,m} (2l+1)(-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta_{\mathbf{k}}) \overset{*}{\xi}{}^{(l)}(\chi; r) P_l^m(\cos\theta_{\mathbf{r}}), \tag{11.4}$$

где θ – угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$, $-l \le m \le l$ и $\chi = \ln(k^0 + k)/m$ – так называемая быстрота частицы, которую удобно использовать для параметризации энергии и импульса частицы на массовом гиперболоиде, поскольку $k^0 = m\,\mathrm{ch}\chi$ и $k = m\,\mathrm{sh}\chi$.

Подставляя разложения (11.1) и (11.4) в формулу (10.6), получаем:

$$\varphi_{_M}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi}{k} \int_0^\infty dr \int_{-1}^1 d\cos\theta_{\mathbf{r}} \sum_{l,m} (2l+1)(-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times$$

$$\times P_l^m(\cos\theta_{\mathbf{k}}) \overset{*}{\xi}{}^{(l)}(\chi; r) P_l^m(\cos\theta_{\mathbf{r}}) \sum_{l'=0}^\infty (2l'+1) \varphi_{_M}^{(l')}(r) P_{l'}(\cos\theta_{\mathbf{r}}) =$$

$$= \frac{4\pi}{k} \sum_{l=0}^\infty (2l+1) P_l(\cos\theta_{\mathbf{k}}) \int_0^\infty dr \, \overset{*}{\xi}{}^{(l)}(\chi; r) \varphi_{_M}^{(l)}(r). \tag{11.5}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_{_M}^{(l)}(\chi) \equiv \frac{k}{8\pi} \int_{-1}^1 d\cos\theta_{\mathbf{k}} \varphi_{_M}(\mathbf{k}) P_l(\cos\theta_{\mathbf{k}}) = \int_0^\infty dr \, \overset{*}{\xi}{}^{(l)}(\chi; r) \varphi_{_M}^{(l)}(r), \tag{11.6}$$

т. е. найдена связь между коэффициентами парциального разложения волновой функции в координатном пространстве (11.1) и в импульсном пространстве:

$$\varphi_{_M}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k} \sum_{l=0}^\infty (2l+1) \varphi_{_M}^{(l)}(\chi) P_l(\cos\theta_{\mathbf{k}}). \tag{11.7}$$

Из разложения (11.4) следует, что

$$\overset{*}{\xi}{}^{(l)}(\chi; r) = \frac{1}{2} mr\, \mathrm{sh}\chi \int\limits_{-1}^{1} d\cos\theta (\mathrm{ch}\chi - \mathrm{sh}\chi \cos\theta)^{imr-1} P_l(\cos\theta). \tag{11.8}$$

В простейшем случае S-волны ($l = 0$), очевидно, имеем

$$\overset{*}{\xi}{}^{(0)}(\chi; r) = \sin(mr\chi), \tag{11.9}$$

поэтому связь (11.6) имеет вид:

$$\varphi^{(0)}_{M}(\chi) = \int\limits_{0}^{\infty} dr \sin(mr\chi) \varphi^{(0)}_{M}(r), \tag{11.10}$$

и обратное преобразование:

$$\varphi^{(0)}_{M}(r) = \frac{2m}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\chi \sin(mr\chi) \varphi^{(0)}_{M}(\chi). \tag{11.11}$$

Таким образом, для S-волны радиальные волновые функции в пространстве быстрот и пространстве координат связаны обычным синус-преобразованием Фурье. Отсюда следует интересный вывод о том, что, в отличие от нерелятивистской картины, релятивистская координата r сопряжена не импульсу частицы, а ее быстроте χ.

Проведем теперь разложение квазипотенциального уравнения (10.1) в импульсном пространстве по парциальным волнам. Используя разложение (11.7) и разлагая квазипотенциал по парциальным волнам:

$$V_0(\mathbf{k}; \mathbf{k}'|M) = \frac{1}{kk'} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \mathcal{V}^{(l)}_0(\chi; \chi'|M) P_l(\cos\theta), \tag{11.12}$$

где θ – угол между импульсами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, несложно вывести парциальное уравнение в пространстве быстрот χ и χ':

$$\mathrm{ch}\chi\left(\mathrm{ch}\chi-\frac{M}{2m}\right)\varphi_{_M}^{(l)}(\chi)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^\infty d\chi(2\,\mathrm{ch}\chi\,\mathrm{ch}\chi'-1)\mathcal{V}_0^{(l)}(\chi;\chi'|M)\varphi_{_M}^{(l)}(\chi'). \tag{11.13}$$

В случае локального квазипотенциала (10.28) мы, очевидно, можем записать:

$$\mathcal{V}_0^{(l)}(\chi;\chi'|M)=\frac{1}{2}m^2\,\mathrm{sh}\chi\,\mathrm{sh}\chi'\int\limits_{-1}^{1}d\cos\theta\,V_0(m\,\mathrm{sh}y|M)P_l(\cos\theta), \tag{11.14}$$

где $m\,\mathrm{sh}y=|\mathbf{q}|=|\mathbf{k}(-)\mathbf{k}'|$, т. е. y – быстрота, отвечающая "кривой"разности начального и конечного импульсов и, как нетрудно показать, следующим образом связанная с быстротами χ и χ':

$$\mathrm{ch}y=\mathrm{ch}\chi\,\mathrm{ch}\chi'-\mathrm{sh}\chi\,\mathrm{sh}\chi'\cos\theta. \tag{11.15}$$

В простейшем случае S-волны, проводя замену переменной, получаем:

$$\mathcal{V}_0^{(0)}(\chi;\chi'|M)=\frac{1}{2}m^2\int\limits_{|\chi-\chi'|}^{\chi+\chi'}dy\,\mathrm{sh}y\,V_0(m\,\mathrm{sh}y|M). \tag{11.16}$$

Возвращаясь к квазипотенциалам, обобщающим кулоновское взаимодействие релятивистских частиц, мы получаем для случая (10.34):

$$\mathcal{V}_0^{(0)}(\chi;\chi'|M) = 2\pi\alpha_s \ln\frac{\chi+\chi'}{|\chi-\chi'|}. \tag{11.17}$$

Для квазипотенциала (10.39) имеем:

$$\mathcal{V}_0^{(0)}(\chi;\chi'|M) = 2\pi\alpha \ln\frac{\mathrm{sh}(\chi+\chi')/2}{\mathrm{sh}|\chi-\chi'|/2}, \tag{11.18}$$

и для (10.41):

$$\mathcal{V}_0^{(0)}(\chi;\chi'|M) = 2\pi\alpha \ln\frac{\mathrm{th}(\chi+\chi')/2}{\mathrm{th}|\chi-\chi'|/2}. \tag{11.19}$$

Продолжим исследование случая S-волны в конфигурационном пространстве. Нетрудно видеть, что гамильтониан (11.3) принимает совсем простой вид:

$$\hat{\mathcal{H}}_r^{(0)} = 2m\,\mathrm{ch} i\lambda\frac{\partial}{\partial r}. \tag{11.20}$$

Попытаемся найти спектр связанных состояний в релятивистском кулоновском потенциале (10.33). Для этого будем искать решение уравнения (11.2), имеющее следующую асимптотику при $r\to\infty$:

$$\varphi_{_M}^{(0)}(r) \approx r^n e^{-mr\chi_0}, \tag{11.21}$$

где χ_0 – некий параметр, а n – номер радиального возбуждения ($n=1$ соответствует основному состоянию). Подставляя волновую функцию (11.21) в уравнение (11.2) в пределе

$r \to \infty$ и сравнивая коэффициенты при старших степенях r^n и r^{n-1}, получаем два соотношения:

$$\cos\chi_0 = \frac{M}{2m}; \tag{11.22}$$

$$\operatorname{tg} 2\chi_0 = \frac{\alpha}{n}\,. \tag{11.23}$$

Из соотношения (11.22) следует, что параметр χ_0 характеризует дефект массы в связанной системе, а энергия связи выражается через него следующим образом:

$$E = M - 2m = -4m\sin^2\frac{\chi_0}{2}. \tag{11.24}$$

Нетрудно видеть, что комбинация двух соотношений (11.22) и (11.23) позволяет определить спектр масс радиальных возбуждений связанного состояния:

$$M_n^2 = 2m^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2/n^2}}\right). \tag{11.25}$$

Легко заметить, что в случае малой константы связи α энергия связи должна быть мала ($M_n \to 2m$), и спектр (11.25) становится близким к обычному нерелятивистскому кулоновскому спектру:

$$E_n = M_n - 2m = -\frac{\alpha^2 m}{4n^2}. \tag{11.26}$$

В случае же сильных полей релятивистский спектр (11.25) существенно отличается от кулоновского. Хотелось бы обратить внимание на важную особенность спектра (11.25), заключающуюся в том, что даже в очень сильных полях масса основного состояния не может быть меньше величины $\sqrt{2}\,m$. По-видимому это связано с тем, что ниже этого порога в сильных полях должно происходить рождение пар новых частиц из вакуума, и следовательно, такое состояние уже нельзя описывать как двухчастичную систему, что мы исходно закладывали в постановку задачи.

Конечно, для описания реальных спектров мезонов, представляемых как связанные состояния кварков и антикварков, необходимо вводить "запирающий"потенциал, препятствующий их вылетанию. Как было показано в ряде работ, хорошие результаты при описании экспериментальных данных по спектрам масс и ширинам распадов мезонов получаются при использовании комбинированных потенциалов типа "воронки", например:

$$V_0(r|M) = -\frac{\alpha_s}{r} + \sigma r. \tag{11.27}$$

Получить точное решение радиального квазипотенциального уравнения (11.2) в этом случае оказывается нереальным, поэтому применим здесь метод квазиклассического приближения. Для наглядности снова рассмотрим случай S-волны, тогда квазипотенциальное уравнение (11.2) для парциальной волны с $l = 0$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ch} i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left(a - \mathrm{ch} i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi^{(0)}_{M}(r) = \\ &= 2\mathrm{ch} i\lambda\frac{\partial}{\partial r}v(r)\mathrm{ch} i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\varphi^{(0)}_{M}(r) - v(r)\varphi^{(0)}_{M}(r), \end{aligned} \tag{11.28}$$

где $a = M/2m$ и $v(r) = V_0(r|M)/2m$.

В квазиклассическом приближении решение уравнения (11.28) $\varphi^{(0)}_{M}(r)$ ищется в виде

$$\varphi^{(0)}_{M}(r) \sim \exp\left\{\frac{i}{\lambda}g(r)\right\}, \tag{11.29}$$

где $g(r)$ разлагается в ряд:

$$g(r) = g_0(r) + \frac{\lambda}{i} g_1(r) + \left(\frac{\lambda}{i}\right)^2 g_2(r) + \cdots . \qquad (11.30)$$

Подставляя это разложение в уравнение (11.28) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем для первых двух членов разложения

$$g_0'(r) = \pm\chi(r); \qquad (11.31)$$

$$g_1(r) = -\frac{1}{2} \ln \operatorname{sh} \chi(r) \left\{2\left[2v(r)+1\right] \operatorname{ch} \chi(r) - a\right\}, \qquad (11.32)$$

где

$$\operatorname{ch} \chi(r) = \frac{\sqrt{4v(r)\left[2v(r)+1\right] + a^2} + a}{2\left[2v(r)+1\right]}. \qquad (11.33)$$

Очевидно, классическая точка поворота r_+ будет определяться соотношением: $\operatorname{ch} \chi(r_+) = 1$, что, как нетрудно показать, эквивалентно равенству $v(r_+) = a - 1$. Мы рассмотрим здесь случай, когда $a > 1$. Квазиклассическое решение квазипотенциального уравнения в классически доступной области слева от этой точки поворота будет иметь вид:

$$\varphi_{_M}^{(0)}(r) = \frac{C}{\sqrt{\operatorname{sh} \chi(r) \left\{2[2v(r)+1] \operatorname{ch} \chi(r) - a\right\}}} \times$$

$$\times \sin\left[\frac{1}{\lambda} \int\limits_r^{r_+} \chi(r) dr + \frac{\pi}{4}\right]. \qquad (11.34)$$

Другая точка поворота $r_- < r_+$ будет определяться равенством $2v(r_-)+1=0$, где $\operatorname{ch}\chi(r)$ обращается в бесконечность, а волновая функция должна зануляться. Следовательно, решение справа от этой точки поворота должно иметь вид:

$$\varphi^{(0)}_{M}(r) = \frac{C'}{\sqrt{\operatorname{sh}\chi(r)\,\{2[2v(r)+1]\operatorname{ch}\chi(r)-a\}}}\times$$
$$\times \sin\left[\frac{1}{\lambda}\int\limits_{r_-}^{r}\chi(r)dr\right]. \tag{11.35}$$

Таким образом, квазиклассическое условие квантования задается формулой:

$$\int\limits_{r_-}^{r_+}\chi(r)dr = \pi(n+3/4)\lambda. \tag{11.36}$$

Нетрудно понять, что точка поворота r_- имеет чисто релятивистское происхождение, и при умеренных константах в используемом нами приближении $r_- \simeq \alpha_s\lambda$.

Отметим, что введенная здесь функция $\chi(r)$ имеет смысл быстроты частицы, движущейся в поле $v(r)$. Таким образом, как и при рассмотрении в импульсном пространстве, мы приходим к выводу, что в релятивистском случае наиболее естественным оказывается описание в терминах быстроты, которая является непосредственным обобщением нерелятивистского импульса $p(r) = m\sqrt{a-1-v(r)}$ в квазиклассическом подходе.

12. Двухчастичный распад мезонов

Поскольку мезон состоит из кварка и антикварка, то его распад, например, в два лептона определяется аннигиляцией кварк-антикварковой пары в лептон-антилептонную. Для анализа этого процесса нужно по аналогии с (4.1) и (8.1) рассмотреть следующую функцию Грина:

$$\Gamma(x_1, x_2; x_1', x_2') = i\langle 0|T\{\psi_{\ell 1}(x_1)\bar{\psi}_{\ell 2}(x_2)\psi_{q2}(x_2')\bar{\psi}_{q1}(x_1')S\} \overset{+}{S} |0\rangle, \tag{12.1}$$

где $\psi_{\ell i}$ – поля лептонов с массами $m_{\ell i}$, а ψ_{qi} – поля кварков с массами m_{qi}. Спроектируем это выражение на одночастичные волновые функции частиц и античастиц, при этом в качестве пространственно-подобных поверхностей выберем, как и ранее, гиперплоскости $\lambda x = \tau$ и $\lambda x' = \tau'$ в конечном и начальном состояниях. Тогда для функции Грина в импульсном пространстве можно получить спектральное представление, аналогичное (4.12):

$$\tilde{\Gamma}^{(-)}(\mathbf{p}_1; \mathbf{k}_1|P, \varepsilon_P) =$$

$$= \sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n} (2\pi)^3 \lambda^0 \delta^{(3)} \left[\mathbf{P}_n - \mathbf{P} - (\varepsilon_{P_n} - \varepsilon_P)\boldsymbol{\lambda}\right] \frac{\tilde{\Phi}^{(-)}_{\ell P_n}(\mathbf{p}_1)\ \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{qP_n}(\mathbf{k}_1)}{\varepsilon_{P_n} - \varepsilon_P - i0}, \tag{12.2}$$

где функции $\tilde{\Phi}^{(-)}_{\ell,qP_n}$ определяются следующим образом

$$2\varepsilon_{k_2}\tilde{\Phi}^{(-)}_{\ell,qP_n}(\mathbf{p}_1) =$$

$$= \int d^4x\, \delta(\lambda x) e^{ip_1 x} \bar{v}^{(+)}_{\ell 1,q1}(p_1) \hat{\lambda} \Phi_{\ell,qP_n}(x,0) \hat{\lambda} v^{(+)}_{\ell 2,q2}(p_2), \qquad (12.3)$$

через соответствующие амплитуды Бете-Солпитера:

$$\Phi_{\ell,qP_n}(x_1,x_2) = \langle 0|T\{\psi_{\ell 1,q1}(x_1)\bar{\psi}_{\ell 2,q2}(x_2)S\} \overset{+}{S} |P_n\rangle. \qquad (12.4)$$

Из спектрального представления (12.2) следует, что вблизи точки $P^2 = M^2$, где M – масса мезона, функция Грина имеет следующее поведение (см. (5.3)):

$$\tilde{\Gamma}^{(-)}(\mathbf{p}_1;\mathbf{k}_1|P,\varepsilon_P)\big|_{P^2\simeq M^2} \simeq \frac{\tilde{\Phi}^{(-)}_{\ell P}(\mathbf{p}_1)\ \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{qP}(\mathbf{k}_1)}{M^2 - P^2 - i0}, \qquad (12.5)$$

где $\tilde{\Phi}^{(-)}_{qP}$ – одновременная стационарная волновая функция мезона, а функция $\tilde{\Phi}^{(-)}_{\ell P}$ связана с амплитудой распада этого связанного состояния на лептон-антилептонную пару следующим предельным соотношением:

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{i(\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2}-\varepsilon_P)\tau} 2\varepsilon_{p_2} \tilde{\Phi}^{(-)}_{\ell P}(\mathbf{p}_1) = 2\pi i \delta(\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2}-\varepsilon_P)\mathcal{M}(\mathbf{p}_1|P). \qquad (12.6)$$

Свернем теперь справа соотношение (12.5) с обратной функцией Грина системы "кварк-антикварк"$\tilde{G}^{(-)}_q(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,\varepsilon_P)$, введенной в разделе 4, и волновой функцией мезона, перейдем к пределу $P^2 \to M^2$ и воспользуемся условием нормировки квазипотенциальной волновой функции (5.12), в результате:

$$\tilde{\Phi}^{(-)}_{\ell P}(\mathbf{p}_1) = \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} \Big[\tilde{\Gamma}^{(-)}(\mathbf{p}_1;\mathbf{k}_1|P,M)\times$$

$$\times \int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1} \left[\tilde{G}^{(-)}_q\right]^{-1}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,M)\tilde{\Phi}^{(-)}_{qP}(\mathbf{k}'_1)\Big]. \qquad (12.7)$$

Связную часть функции Грина (12.5) можно представить в виде:

$$\int d^3\omega_{\mathbf{p}'_1}\int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}\tilde{G}^{(0)}_{\ell}(\mathbf{p}_1;\mathbf{p}'_1|P,M)T(\mathbf{p}'_1;\mathbf{k}'_1|P,M)\tilde{G}^{(0)}_{q}(\mathbf{k}'_1;\mathbf{k}_1|P,M), \tag{12.8}$$

где $\tilde{G}^{(0)}_{\ell}(P,M)$ и $\tilde{G}^{(0)}_{q}(P,M)$ – свободные функции Грина, соответственно, лептон-антилептонной и кварк-антикварковой пар, определяемые формулой (4.14), а $T(P,M)$ – амплитуда перехода этих пар друг в друга вне энергетической поверхности, которая представляется следующим образом:

$$T(\mathbf{p}_1;\mathbf{k}_1|P,M)=\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p'_1}\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{k'_1}\times$$

$$\times\left[\frac{(\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2}-\varepsilon_P)\bar{v}^{(+)}_{\ell 1}(p_1)\bar{v}^{(-)}_{q2}(k_2)}{(\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p'_1}-i0)(\varepsilon_{p'_1}+\varepsilon_{p_2}-\varepsilon_P-i0)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\tilde{R}^{(4)}(p'_1;k'_1|P)v^{(-)}_{q1}(k_1)v^{(+)}_{\ell 2}(p_2)(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P)}{(\varepsilon_{k_1}-\varepsilon_{k'_1}-i0)(\varepsilon_{k'_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P-i0)}\right], \tag{12.9}$$

где $R^{(4)}(p_1;k_1|P)$ – вакуумное среднее от радиационного оператора

$$R^{(4)}(x_1,x_2;x'_1,x'_2)=$$

$$=i\langle 0|\frac{\delta^4 S}{\delta\bar{\psi}_{\ell 1}(x_1)\delta\psi_{\ell 2}(x_2)\delta\bar{\psi}_{q2}(x'_2)\delta\psi_{q1}(x'_1)}\overset{+}{S}|0\rangle. \tag{12.10}$$

в импульсном протранстве, 4-импульсы связаны следующими соотношениями:

$$p'_1-p_1=(\varepsilon_{p'_1}-\varepsilon_{p_1})\lambda;\quad k_1-k'_1=(\varepsilon_{k_1}-\varepsilon_{k'_1})\lambda. \tag{12.11}$$

Подставляя теперь (12.8) в (12.7) и учитывая (12.6), получаем:

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}_1|P) = \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1}\Big[T(\mathbf{p}_1;\mathbf{k}_1|P,M)\int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1}\tilde{G}_q^{(0)}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P,M)\times$$

$$\times\int d^3\omega_{\mathbf{k}''_1}\left[\tilde{G}_q^{(-)}\right]^{-1}(\mathbf{k}'_1;\mathbf{k}''_1|P,M)\tilde{\Phi}_{qP}^{(-)}(\mathbf{k}''_1)\Big], \qquad (12.12)$$

или, если пренебречь взаимодействием кварка и антикварка в промежуточном состоянии, то

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}_1|P) = \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} T(\mathbf{p}_1;\mathbf{k}_1|P,M)\tilde{\Phi}_{qP}^{(-)}(\mathbf{k}_1). \qquad (12.13)$$

Рассмотрим теперь конкретно распад векторного нейтрального мезона на лептон-антилептонную пару. Амплитуда распада $V \to \ell\bar{\ell}$ имеет следующую структуру:

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}_1|P) = 4\pi\alpha f_V\ \bar{v}_\ell^{(+)}(p_1)\hat{e}v_\ell^{(+)}(p_2), \qquad (12.14)$$

где f_V – константа распада, а e^μ – 4-вектор поляризации векторного мезона, удовлетворяющий условиям: $(Pe) = 0$ и $e^2 = -1$.

Если рассматриваемый распад обусловлен только электромагнитным взаимодействием, т. е.

$$S = T\exp\Big\{ie\int d^4x\,[- : \bar{\psi}_\ell(x)\gamma^\mu\psi_\ell(x)A_\mu(x) : +$$

$$+e_q : \bar{\psi}_q(x)\gamma^\mu\psi_q(x)A_\mu(x) :]\Big\}, \qquad (12.15)$$

где e_q – заряд кварка, то по формуле (12.10) нетрудно рассчитать в низшем приближении по теории возмущений:

$$\tilde{R}^{(4)}(p_1;k_1|P) = -e^2 e_q\gamma^\mu D^c_{\mu\nu}(P)\gamma^\nu. \qquad (12.16)$$

Подставляя (12.16) в (12.9), получаем:

$$T(\mathbf{p}_1;\mathbf{k}_1|P,M) =$$

$$= -\frac{4\pi\sqrt{3}\alpha e_q}{M^2}\bar{v}_\ell^{(+)}(p_1)\gamma_\mu v_\ell^{(+)}(p_2)\bar{v}_q^{(-)}(k_2)\gamma^\mu v_q^{(-)}(k_1), \qquad (12.17)$$

где введен фактор $\sqrt{3}$, учитывающий наличие трех цветов у кварков.

В отличие от (9.1) квазипотенциальная волновая функция векторного мезона имеет следующую структуру:

$$\tilde{\Phi}_{qP}^{(-)}(\mathbf{k}_1) = \frac{\bar{v}_q^{(+)}(k_1)\hat{e}v_q^{(+)}(k_2)}{2\varepsilon_{k_2}}\varphi_P(\mathbf{k}_1). \qquad (12.18)$$

Подставляя (12.17) и (12.18) в (12.13), получаем

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}_1|P) = -\frac{4\pi\sqrt{3}\alpha e_q}{M^2}\bar{v}_\ell^{(+)}(p_1)\gamma_\mu v_\ell^{(+)}(p_2)\times$$

$$\times\int\frac{d^3\omega_{\mathbf{k}_1}}{2\varepsilon_{k_2}}\bar{v}_q^{(-)}(k_2)\gamma^\mu v_q^{(-)}(k_1)\bar{v}_q^{(+)}(k_1)\hat{e}v_q^{(+)}(k_2)\varphi_P(\mathbf{k}_1) =$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{3}\alpha e_q}{M^2}\bar{v}_\ell^{(+)}(p_1)\gamma_\mu v_\ell^{(+)}(p_2)\times$$

$$\times\int\frac{d^3\omega_{\mathbf{k}_1}}{2\varepsilon_{k_2}}2\left[(k_1+k_2)^2e^\mu - 2(ek_1)k_2^\mu - 2(ek_2)k_1^\mu\right]\varphi_P(\mathbf{k}_1). \qquad (12.19)$$

Учитывая, что $(ek_2) = -(ek_1)$ и $(k_1+k_2)^2 = (2\varepsilon_{k_1})^2$, получаем для амплитуды распада формулу (12.14), причем

$$f_V = \frac{8\sqrt{3}e_q}{M^2}\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1}\frac{\varepsilon_{k_1}^2 - (ek_1)^2}{2\varepsilon_{k_1}}\varphi_P(\mathbf{k}_1). \qquad (12.20)$$

После усреднения по поляризациям векторного мезона с использованием формулы $\sum\limits_{pol} e_\mu e_\nu = -g_{\mu\nu} + \lambda_\mu \lambda_\nu$ получаем

$$f_{\scriptscriptstyle V} = \frac{2\sqrt{3}e_q}{M^2} \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} 2\varepsilon_{k_1} \left(1 - \frac{\varepsilon_{k_1} - m^2}{3\varepsilon_{k_1}}\right) \varphi_{\scriptscriptstyle P}(\mathbf{k}_1). \qquad (12.21)$$

В системе покоя кваркония для волновой функции в S-состоянии после интегрирования по углам имеем:

$$f_{\scriptscriptstyle V} = \frac{4\sqrt{3}e_q}{(2\pi)^2 M^2} \int\limits_0^\infty dk_1 k_1^2 \left[1 - \frac{k_1^2}{3(k_1^2 + m_q^2)}\right] \varphi_{\scriptscriptstyle M}(k_1). \qquad (12.22)$$

Полная ширина распада кваркония в системе его покоя дается известной формулой:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{M^2 - 4m_\ell^2}}{64\pi^2 M^2} \int d\Omega_{\mathbf{p}_1} \, |\mathcal{M}(\mathbf{p}_1|M)|^2. \qquad (12.23)$$

Подставляя сюда (12.14) и интегрируя по телесному углу, получаем

$$\Gamma = \frac{\alpha^2\sqrt{M^2 - 4m_\ell^2}}{2M^2} f_{\scriptscriptstyle V}^2 \int d\Omega_{\mathbf{p}_1} \left[M^2 - 4(\mathbf{e}\mathbf{p}_1)^2\right] =$$
$$= \frac{4\pi\alpha^2 M}{3} f_{\scriptscriptstyle V}^2 \left(1 - \frac{4m_\ell^2}{M^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2m_\ell^2}{M^2}\right). \qquad (12.24)$$

Условие нормировки для квазипотенциальной волновой функции (12.18) имеет вид:

$$\int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} \, \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}_P^{(+)}(\mathbf{k}_1) 2\varepsilon_{k_1} \tilde{\Phi}_P^{(-)}(\mathbf{k}_1) =$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}_1 \left[1 - \frac{(\mathbf{e}\mathbf{k}_1)^2}{k_1^2 + m_q^2} \right] |\varphi_{_M}(\mathbf{k}_1)|^2 = 2M. \qquad (12.25)$$

Для волновой функции S-состояния после интегрирования по углам имеем:

$$\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^\infty dk_1 k_1^2 \left[1 - \frac{k_1^2}{3(k_1^2 + m_q^2)} \right] |\varphi_{_M}(k_1)|^2 = M. \qquad (12.26)$$

Воспользовавшись формулами (10.7) и (10.23), нормированную на единицу волновую функцию S-состояния в начале координат можно записать так:

$$\tilde{\varphi}_{_M}(0) = \frac{m_q^2}{2\pi^2\sqrt{M}} \int\limits_0^\infty \frac{dk_1 k_1}{k^0} \ln \frac{k_1^0 + k_1}{m_q}\, \varphi_{_M}(k_1). \qquad (11.27)$$

Тогда в нерелятивистском пределе ($k_1 \ll m_q$) легко найти связь:

$$f_{_V} = \frac{2\sqrt{3}e_q}{M^{3/2}}\, \tilde{\varphi}_{_M}(0), \qquad (12.28)$$

и из формулы (12.24), пренебрегая массой лептона, вывести хорошо известную формулу:

$$\Gamma = \frac{16\pi\alpha^2 e_q^2}{M^2} |\, \tilde{\varphi}_{_M}(0)|^2. \qquad (12.29)$$

Рассмотрим теперь распад заряженного псевдоскалярного мезона на лептон-антилептонную пару. Структура амплитуды распада в этом случае имеет вид:

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}_1|P) = \frac{G}{\sqrt{2}}\, f_\pi\, \bar{v}_{\ell 1}^{(+)}(p_1) \hat{P}(1-\gamma^5) v_{\ell 2}^{(+)}(p_2), \qquad (12.30)$$

где f_π – константа распада. Очевидно, что в низшем приближении будет участвовать только слабое взаимодействие, и поэтому мы можем записать

$$S = T\exp\{-\frac{ig}{2\sqrt{2}}\int d^4x\ [:\bar{\psi}_{\ell 2}(x)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_{\ell 1}(x)W^{(+)}_\mu(x):+$$

$$+:\bar{\psi}_{q1}(x)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_{q2}(x)W^{(-)}_\mu(x):]\}, \qquad (12.31)$$

и в силу формулы (12.10) имеем:

$$\tilde{R}^{(4)}(p_1;k_1|P) = -\frac{g^2}{8}\gamma^\mu(1-\gamma^5)D^c_{\mu\nu}(P)\gamma^\nu(1-\gamma^5), \qquad (12.32)$$

где

$$D^c_{\mu\nu}(P) = \frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu/M_W^2}{M_W^2 - P^2 - i0}. \qquad (12.33)$$

Подставляя (12.32) в (12.9), получаем:

$$T(\mathbf{p}_1;\mathbf{k}_1|P,M) = \frac{\sqrt{3}G}{\sqrt{2}(M^2-M_W^2)}\bar{v}^{(+)}_{\ell 1}(p_1)\gamma^\mu(1-\gamma^5)v^{(+)}_{\ell 2}(p_2)\times$$

$$\times(M_W^2 g_{\mu\nu} - P_\mu P_\nu)\bar{v}^{(-)}_{q2}(k_2)\gamma^\nu(1-\gamma^5)v^{(-)}_{q1}(k_1), \qquad (12.34)$$

где $G/\sqrt{2} = g^2/8M_W^2$.

Подставляя (12.34) и (9.1) в (12.13), получаем:

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}_1|P) = \frac{\sqrt{3}G}{\sqrt{2}(M_W^2-M^2)}\bar{v}^{(+)}_{\ell 1}(p_1)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v^{(+)}_{\ell 2}(p_2)\times$$

$$\times(M_W^2 g_{\mu\nu} - P_\mu P_\nu) 4 \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} \frac{m_{q1} k_2^\nu + m_{q2} k_1^\nu}{2\varepsilon_{k_2}} \, \varphi_{{}_P}(\mathbf{k}_1), \quad (12.35)$$

откуда несложно заключить, что амплитуда распада действительно имеет структуру (12.30), причем

$$f_\pi = \frac{4\sqrt{3}}{M} \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} \frac{m_{q1}\varepsilon_{k_2} + m_{q2}\varepsilon_{k_1}}{2\varepsilon_{k_2}} \, \varphi_{{}_P}(\mathbf{k}_1). \quad (12.36)$$

Если пренебречь разностью масс кварка и антикварка, то в случае S-состояния имеем:

$$f_\pi = \frac{4\sqrt{3} m_q}{M} \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} \, \varphi_{{}_P}(\mathbf{k}_1) = \frac{4\sqrt{3} m_q}{(2\pi)^2 M} \int\limits_0^\infty \frac{dk_1}{k_1^0} k_1^2 \, \varphi_{{}_M}(k_1). \quad (12.37)$$

Наконец, вычислим ширину распада для случая, когда антилептон (антинейтрино) имеет нулевую массу ($m_\nu = 0$). В этом случае амплитуда (12.30) принимает вид:

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}_1|P) = \frac{G m_\ell}{\sqrt{2}} \, f_\pi \, \bar{v}_{\ell 1}^{(+)}(p_1)(1-\gamma^5) v_{\ell 2}^{(+)}(p_2), \quad (12.38)$$

откуда

$$\Gamma = \frac{G^2 M m_\ell^2}{8\pi} \, f_\pi^2 \left(1 - \frac{m_\ell^2}{M^2}\right)^2. \quad (12.39)$$

Наконец имеется ещч один "классический"распад кваркония – это распад псевдоскалярного нейтрального мезона на два фотона. В этом случае вместо (12.1) нужно рассмотреть функцию Грина

$$\Gamma^{\mu\nu}(x_1, x_2; x_1', x_2') =$$

$$= i\langle 0|T\{A^{\mu}(x_1)A^{\nu}(x_2)\psi_q(x_2')\bar{\psi}_q(x_1')S\}\overset{+}{S}|0\rangle. \quad (12.40)$$

Амплитуда распада будет по-прежнему определяться выражением (12.13), где амплитуда аннигиляции кварк-антикварковой пары в два фотона дается выражением:

$$T(\mathbf{p}_1;\mathbf{k}_1|P,M) = \frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{p_1'}\frac{1}{2\pi}\int d\varepsilon_{k_1'}\times$$

$$\times\left[\frac{(\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2}-\varepsilon_P)\overset{*}{e}{}^{\nu}(p_1)\overset{*}{e}{}^{\mu}(p_2)\bar{v}_q^{(-)}(k_2)}{(\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_1'}-i0)(\varepsilon_{p_1'}+\varepsilon_{p_2}-\varepsilon_P-i0)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\tilde{R}^{(4)}_{\mu\nu}(p_1';k_1'|P)v_q^{(-)}(k_1)(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P)}{(\varepsilon_{k_1}-\varepsilon_{k_1'}-i0)(\varepsilon_{k_1'}+\varepsilon_{k_2}-\varepsilon_P-i0)}\right]. \quad (12.41)$$

Здесь функция $R^{(4)}(p_1;k_1|P)$, как и ранее, – фурье-образ вакуумного среднего от радиационного оператора, которое в данном случае, в отличие от (12.10), имеет вид:

$$R^{(4)}_{\mu\nu}(x_1,x_2;x_1',x_2') = i\langle 0|\frac{\delta^4 S}{\delta A^{\mu}(x_1)\delta A^{\nu}(x_2)\delta\bar{\psi}_q(x_2')\delta\psi_q(x_1')}\overset{+}{S}|0\rangle. \quad (12.42)$$

Используя (8.2), в низшем приближении по теории возмущений имеем:

$$\tilde{R}^{(4)}_{\mu\nu}(p_1;k_1|P) = e^2e_q^2\gamma_{\mu}S^c(p_1-k_1)\gamma_{\nu} + e^2e_q^2\gamma_{\nu}S^c(p_2-k_1)\gamma_{\mu}, \quad (12.43)$$

где $S^c(q)$ определяется формулой (7.21). В результате нетрудно вычислить

$$T(\mathbf{p}_1;\mathbf{k}_1|P,M) = \left[\frac{4\pi\sqrt{3}\alpha e_q^2\bar{v}^{(-)}(k_2)\overset{*}{\hat{e}}(p_2)}{2\sqrt{2}\sqrt{q^2+m_q^2}}\times\right.$$

$$\times \frac{2\left[\hat{p}_1 - \hat{k}_1 - (\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{k_1})\hat{\lambda} - m_q\right] \overset{*}{\hat{e}} (p_1) v^{(-)}(k_1)}{\sqrt{q^2 + m_q^2} - M + \varepsilon_{p_1} + \varepsilon_{k_1} - i0}\Bigg] -$$

$$-\left[\frac{4\pi\alpha e_q^2 \bar{v}^{(-)}(k_2) \overset{*}{\hat{e}} (p_1)}{2\sqrt{2}\sqrt{q'^2 + m_q^2}} \times\right.$$

$$\times \frac{2\left[\hat{p}_1 + \hat{k}_1 - (\varepsilon_{p_1} + \varepsilon_{k_1})\hat{\lambda} + m_q\right] \overset{*}{\hat{e}} (p_2) v^{(-)}(k_1)}{\sqrt{q'^2 + m_q^2} - M + \varepsilon_{p_1} + \varepsilon_{k_1} - i0}\Bigg], \qquad (12.44)$$

где

$$q^2 = (\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{k_1})^2 - (p_1 - k_1)^2; \quad q'^2 = (\varepsilon_{p_1} + \varepsilon_{k_1})^2 - (p_1 + k_1)^2. \qquad (12.45)$$

Структуру амплитуды распада псевдоскалярного кварко-ния на два фотона можно представить в виде:

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}_1|P) = 4\pi\alpha f_0 i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \overset{*}{e}{}_1^{\mu} \overset{*}{e}{}_2^{\nu} p_1^{\rho} p_2^{\sigma}, \qquad (12.46)$$

или в системе покоя:

$$\mathcal{M}(\mathbf{p}_1|M) = 4\pi\alpha M f_0 i \epsilon_{ijk} \overset{*}{e}{}_1^{i} \overset{*}{e}{}_2^{j} p_1^{k}, \qquad (12.47)$$

где индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3.

Подставляя теперь (12.44) и (9.1) в (12.13) и сравнивая с (12.46), получаем для константы распада выражение:

$$f_0 = \frac{4\sqrt{3} m_q e_q^2}{M} \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} \left[\frac{1}{\sqrt{q^2 + m_q^2}(\sqrt{q^2 + m_q^2} + \varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{p_1} - i0)} + \right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{q'^2+m_q^2}(\sqrt{q'^2+m_q^2}+\varepsilon_{k_1}-\varepsilon_{p_1}-i0)}\Bigg]\varphi_{_P}(\mathbf{k}_1)=$$

$$=\frac{8\sqrt{3}m_q e_q^2}{(2\pi)^3 M}\int\frac{d^3\mathbf{k}_1}{2k_1^0}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{k}_1)^2+m_q^2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{k}_1)^2+m_q^2}+k_1^0-p_1^0-i0}\;\varphi_{_M}(\mathbf{k}_1)\Bigg]. \qquad (12.48)$$

В случае S-состояния, интегрируя по углам, имеем:

$$f_0=\frac{2\sqrt{3}m_q e_q^2}{\pi^2 M^2}\times$$

$$\times\int\frac{dk_1 k_1}{k_1^0}\ln\frac{\sqrt{(2k_1+M)^2+4m_q^2}+2k_1^0-M}{\sqrt{(2k_1-M)^2+4m_q^2}+2k_1^0-M}\;\varphi_{_M}(k_1). \quad (12.49)$$

Для вычисления ширины распада мы можем воспользоваться формулой (12.23), положив в ней $m_\ell=0$. Подставляя в нее амплитуду (12.47) и суммируя по поляризациям фотонов, получим

$$\Gamma=\frac{1}{4}\pi\alpha^2M^3f_0^2. \qquad (12.50)$$

При вычислении мы учли, что $\sum\limits_{pol}e^i\,\overset{*}{e}{}^{i'}=\delta^{ii'}$ и использовали следующее свойство:

$$\sum_{i,j}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk'}=2\delta_{kk'}. \qquad (12.51)$$

13. Редукция квазипотенциального уравнения

Вывод квазипотенциального уравнения для системы трех частиц принципиально не отличается от случая двух частиц. Исходным пунктом снова служит волновая функция Бете-Солпитера, которая в этом случае имеет вид:

$$\Psi_P(x_1, x_2, x_3) = \langle 0|T\{\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)S\} \overset{+}{S} |P\rangle, \qquad (13.1)$$

где P – полный 4-импульс системы трех частиц. После уже знакомой нам процедуры сглаживания и проектирования можно воспользоваться техникой, изложенной в разделах 5 или 7, и получить квазипотенциальное уравнение для амплитуды упругого рассеяния трех частиц $T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2|P, \varepsilon_P)$, аналогичное уравнению (5.21), которое в символьной записи ничем не будет отличаться от уравнения (5.17):

$$T(\varepsilon_P) = V(\varepsilon_P) + V(\varepsilon_P)\tilde{G}^{(0)}(\varepsilon_P)T(\varepsilon_P). \qquad (13.2)$$

Формально отличие состоит лишь в увеличении числа импульсных переменных вследствие наличия дополнительной частицы в системе. Между 4-импульсами частиц имеется связь, характерная для трехмерных динамических уравнений (см., например, (4.6)):

$$\begin{aligned} P - \varepsilon_P\lambda = k_1 + k_2 + k_3 - (\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} + \varepsilon_{k_3})\lambda = \\ = k_1' + k_2' + k_3' - (\varepsilon_{k_1'} + \varepsilon_{k_2'} + \varepsilon_{k_3'})\lambda. \end{aligned} \qquad (13.3)$$

В дальнейшем мы условимся при развернутой записи в качестве независимых переменных использовать импульсы частиц 1 и 2, а импульс частицы 3 выражать через импульсы первых двух частиц и полный 4-импульс системы, используя связь (13.3).

Конечно, отличие трехчастичного случая от двухчастичного не сводится только к увеличению числа переменных – гораздо сложнее становится картина взаимодействия. Попытаемся понять структуру квазипотенциала взаимодействия трех частиц $V(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{k}'_1,\mathbf{k}'_2|P,\varepsilon_P)$. Ясно, что в системе трех частиц возможны взаимодействия в различных подсистемах, состоящих из отдельных пар частиц. Однако, вообще говоря, нельзя исключить и возможности взаимодействия одновременно всех трех частиц. В соответствии с этим мы представим трехчастичный квазипотенциал в виде следующей суммы:

$$V(\varepsilon_P)=\sum_{\alpha}V_{\alpha}(\varepsilon_P), \tag{13.4}$$

где индекс α пробегает следующий набор значений: (12), (23), (13), (0), причем первые три значения (ij) относятся к квазипотенциалам парного взаимодействия частиц i и j, а остальная часть квазипотенциала $V_0(\varepsilon_P)$ описывает *собственно* трехчастичное взаимодействие, не имеющее аналога в нерелятивистской квантовой механике.

В развернутой форме, например, парный квазипотенциал $V_{12}(\varepsilon_P)$ имеет вид:

$$V_{12}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{k}'_1,\mathbf{k}'_2|P,\varepsilon_P)=$$

$$=V_{12}(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}'_1|P_{12},\varepsilon_{P_{12}})(2\pi)^3 2k_3^0\delta^{(3)}(\mathbf{k}_3-\mathbf{k}'_3), \tag{13.5}$$

где импульс P_{12} определяется так, чтобы для системы двух частиц 1 и 2 выполнялось характерное для одновременной формулировки соотношение между 4-импульсами (см. (3.7)):

$$P_{12}-\varepsilon_{P_{12}}\lambda=k_1+k_2-(\varepsilon_{k_1}+\varepsilon_{k_2})\lambda=k'_1+k'_2-(\varepsilon_{k'_1}+\varepsilon_{k'_2})\lambda. \tag{13.6}$$

При этом в силу равенства (13.3) $P - k_3 - (\varepsilon_P - \varepsilon_{k_3})\lambda = P_{12} - \varepsilon_{P_{12}}\lambda$, и в правой части равенства (13.5) импульс частицы 3 может быть выражен через P_{12} и полный 4-импульс системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_3 &= \mathbf{P} - \mathbf{P}_{12} - (\varepsilon_P - \varepsilon_{P_{12}} - \varepsilon_{k_3})\boldsymbol{\lambda}; \\ \varepsilon_{k_3} &= \sqrt{(\varepsilon_P - \varepsilon_{P_{12}})^2 - (P - P_{12})^2 + m_3^2}. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Нетрудно показать, что свободная функция Грина трех частиц, входящая в уравнение (13.2), определяется следующим выражением:

$$\tilde{G}^{(0)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2' | P, \varepsilon_P) =$$

$$= \frac{(2\pi)^3 2k_1^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1')(2\pi)^3 2k_2^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2')}{2\varepsilon_{k_3}(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} + \varepsilon_{k_3} - \varepsilon_P - i0)}. \tag{13.8}$$

В нерелятивистской квантовой механике известна техника Фаддеева, которая позволяет свести задачу трехчастичного рассеяния к рассмотрению процессов только парного перерассеяния. Очевидно, что сделать это в релятивистском случае невозможно из-за присутствия собственно трехчастичного взаимодействия. Однако, обобщение этой техники на релятивистский случай оказывается плодотворным и позволяет лучше понять структуру процессов взаимодействия с участием трех частиц.

Определим амплитуды рассеяния, отвечающие каждому из квазипотенциалов V_α (в дальнейшем для упрощения символьной записи мы будем опускать у всех амплитуд и квазипотенциалов аргумент энергии), с помощью уравнений, аналогичных (13.2):

$$T_\alpha = V_\alpha + V_\alpha \tilde{G}^{(0)} T_\alpha, \tag{13.9}$$

причем T_{ij}, очевидно, представляют собой амплитуды упругого рассеяния двух частиц i и j, а T_0 – амплитуда рассеяния трех частиц, определяемая собственно трехчастичным взаимодействием. Далее введем величины T^{α} с помощью соотношений:

$$T^{\alpha} = V_{\alpha} + V_{\alpha}\tilde{G}^{(0)}T. \tag{13.10}$$

Величины T^{α} определены таким образом, что их сумма, очевидно, равна полной амплитуде рассеяния трех частиц:

$$T = \sum_{\alpha} T^{\alpha}. \tag{13.11}$$

Умножая соотношение (13.10) слева на $(1 + T_{\alpha}\tilde{G}^{(0)})$ и учитывая уравнения (13.9), которым удовлетворяют амплитуды T_{α}, получаем систему зацепляющихся уравнений для величин T^{α}:

$$T^{\alpha} = T_{\alpha} + T_{\alpha}\tilde{G}^{(0)} \sum_{\beta \neq \alpha} T^{\beta}. \tag{13.12}$$

Система уравнений (13.12) эквивалентна исходному уравнению (13.2), а ее ядра T_{α} определяются уравнениями (13.10), формальное решение которых может быть записано в следующей форме:

$$T_{\alpha} = (1 - V_{\alpha}\tilde{G}^{(0)})^{-1} V_{\alpha}. \tag{13.13}$$

Итерация системы уравнений (13.12) приводит к представлению полной амплитуды рассеяния трех частиц в виде:

$$T = T_{12} + T_{23} + T_{13} + T_c, \tag{13.14}$$

где связная часть амплитуды трехчастичного рассеяния T_c имеет вид:

$$T_c = T_0 + \sum_{k=2} \sum ... \sum_{\alpha_1 \neq ... \neq \alpha_k} T_{\alpha_1}\tilde{G}^{(0)}T_{\alpha_2}...\tilde{G}^{(0)}T_{\alpha_k}. \tag{13.15}$$

В приближении парных взаимодействий мы видим, что связная часть амплитуды упругого рассеяния трех частиц полностью выражается через амплитуды последовательных двухчастичных перерассеяний.

Условие унитарности для амплитуды упругого рассеяния трех частиц T можно вывести, как это было сделано в разделе 6 для случая двух частиц. В результате мы будем иметь соотношения:

$$iH = T - \overset{+}{T} - \overset{+}{T}\,(\tilde{G}^{(0)} - \overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)})T =$$

$$= (1 + \overset{+}{T}\overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)})(V - \overset{+}{V}\,)(1 + \tilde{G}^{(0)}T), \qquad (13.16)$$

где H – вклад всех неупругих промежуточных состояний в трехчастичное упругое рассеяние. Аналогичные соотношения можно записать и для каждой из амплитуд T_α:

$$iH_\alpha = T_\alpha - \overset{+}{T}_\alpha - \overset{+}{T}_\alpha\,(\tilde{G}^{(0)} - \overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)})T_\alpha =$$

$$= (1 + \overset{+}{T}_\alpha\overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)})(V_\alpha - \overset{+}{V}_\alpha\,)(1 + \tilde{G}^{(0)}T_\alpha). \qquad (13.17)$$

Теперь нетрудно показать, что итерационный ряд для амплитуды рассеяния (13.14), (13.15) удовлетворяет условию унитарности (13.16), если вклады неупругих каналов связаны соотношением:

$$H = \sum_{n=1}\sum_{m=1}\sum_{\alpha_1\neq\ldots\neq\alpha_{n+m+1}}\!\!\ldots\sum T_{\alpha_1}\tilde{G}^{(0)}T_{\alpha_2}\ldots\tilde{G}^{(0)}T_{\alpha_{n-1}}\tilde{G}^{(0)}H_{\alpha_n}\times$$

$$\times\,\overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)}\,\overset{+}{T}_{\alpha_{n+1}}\overset{+}{\tilde{G}}{}^{(0)}\ldots\,\overset{+}{T}_{\alpha_{n+m+1}}\,. \qquad (13.18)$$

14. Рассеяние на связанном состоянии

Упругое рассеяние трех частиц, конечно, может представлять только академический или вспомогательный интерес. В реальном эксперименте мы всегда имеем дело с рассеянием двух тел. Однако, если хотя бы одно из них является составным, задача безусловно оказывается многочастичной. К примеру, если мы рассматриваем рассеяние частицы на атомном ядре, то мы должны учитывать ее взаимодействие со всеми нуклонами, но при этом не забывать, что они находятся в связанном состоянии, и следовательно важную роль при этом будет играть волновая функция ядра. То же относится и к релятивистскому рассеянию, скажем, электрона на протоне, который представляет собой связанное состояние кварков.

Техника, изложенная в предыдущих параграфах, позволяет нам перейти к изучению взаимодействия составных релятивистских объектов на языке волновых функций и квазипотенциалов. В качестве простейших примеров таких процессов может рассматриваться упругое рассеяние протона на дейтроне или электрона на мезоне, которое сводится как раз к взаимодействию трех частиц при условии связанности двух из них.

Как мы уже отмечали, вывод квазипотенциального уравнения для системы трех частиц принципиально не отличается от случая двух частиц, поэтому мы сразу запишем уравнение для одновременной волновой функции системы трех частиц $\tilde{\Psi}_P^{(-)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ в символьной форме:

$$\left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1}(\varepsilon_P)\tilde{\Psi}_P^{(-)} = V(\varepsilon_P)\tilde{\Psi}_P^{(-)}. \qquad (14.1)$$

В такой записи это уравнение ничем не отличается от уравнения (5.14) для двухчастичной системы, однако мы должны помнить, что свободная трехчастичная функция Грина здесь определяется формулой (13.8), а квазипотенциал взаимодействия трех частиц имеет структуру (13.4). В соответствии с этим перепишем уравнение (14.1) следующим образом:

$$\left(\left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1} - V_\alpha\right)\tilde{\Psi}_P^{(-)} = (V - V_\alpha)\tilde{\Psi}_P^{(-)}, \tag{14.2}$$

где V_α – квазипотенциал какого-либо парного взаимодействия, т. е. α =(12), (23) либо (13). Действуя на это уравнение слева обратным оператором $\left(\left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1} - V_\alpha\right)^{-1}$, получим:

$$\tilde{\Psi}_P^{(-)} = \tilde{\Phi}_{P_\alpha}^{(-)} + \tilde{G}^{(0)}U_\alpha\tilde{\Psi}_P^{(-)}, \tag{14.3}$$

причем функция $\tilde{\Phi}_{P_\alpha}^{(-)}$ является решением двухчастичного квазипотенциального уравнения:

$$\left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1}\tilde{\Phi}_{P_\alpha}^{(-)} = V_\alpha\tilde{\Phi}_{P_\alpha}^{(-)}, \tag{14.4}$$

а ядро уравнения (14.3) определяется следующим образом:

$$U_\alpha = (1 - V_\alpha\tilde{G}^{(0)})^{-1}(V - V_\alpha). \tag{14.5}$$

Таким образом, мы привели уравнение (14.1) для волновой функции системы трех частиц к виду, когда в качестве неоднородного члена в уравнении (14.3) стоит волновая функция системы двух взаимодействующих частиц. Нетрудно записать формальное решение этого уравнения:

$$\tilde{\Psi}_P^{(-)} = (1 - \tilde{G}^{(0)}U_\alpha)^{-1}\tilde{\Phi}_{P_\alpha}^{(-)} =$$

$$= (1 - \tilde{G}^{(0)}V)^{-1}(1 - \tilde{G}^{(0)}V_\alpha)\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha}. \tag{14.6}$$

Неоднородный член в уравнении (14.3) задает граничное значение волновой функции. Если оно соответствует состоянию упругого рассеяния трех частиц, то из уравнений (14.6) и (5.16) имеем:

$$\tilde{\Psi}^{(-)}_P = (1 - \tilde{G}^{(0)}V)^{-1}\tilde{\Psi}^{(0)}_P. \tag{14.7}$$

Если же $\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha}$ является волновой функцией связанного состояния, то трехчастичная волновая функция $\tilde{\Psi}^{(-)}_P$ отвечает процессу развала этого связанного состояния.

Амплитуду упругого рассеяния трех частиц на энергетической поверхности можно представить в виде:

$$M(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2|P) = \langle \tilde{\Psi}^{(0)}_{p'_1p'_2p'_3}, \left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1} \tilde{\Psi}^{(-)}_{p_1p_2p_3}\rangle =$$

$$= \langle \tilde{\Psi}^{(0)}_{p'_1p'_2p'_3}, V\tilde{\Psi}^{(-)}_{p_1p_2p_3}\rangle, \tag{14.8}$$

причем $p_1 + p_2 + p_3 = p'_1 + p'_2 + p'_3 = P$. Для пояснения обозначений запишем последнее равенство в развернутой форме:

$$M(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2|P) =$$

$$= \int d^3\omega_{\mathbf{k}'_1} \int d^3\omega_{\mathbf{k}'_2} \int d^3\omega_{\mathbf{k}_1} \int d^3\omega_{\mathbf{k}_2} \times$$

$$\times \overset{*}{\tilde{\Psi}}{}^{(0)}_{p'_1p'_2p'_3}(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)V(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2|P, \varepsilon_P)\tilde{\Psi}^{(-)}_{p_1p_2p_3}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \tag{14.9}$$

Для доказательства соотношения (14.8) мы воспользуемся формулой (14.7) и, учитывая, что из уравнения (13.2) следует, что

$$(1 - \tilde{G}^{(0)}V)^{-1} = 1 + \tilde{G}^{(0)}T, \tag{14.10}$$

получаем:

$$M(\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2|P) = \langle \tilde{\Psi}^{(0)}_{p_1'p_2'p_3'},\, \left(\left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1} + T\right) \tilde{\Psi}^{(0)}_{p_1p_2p_3}\rangle =$$

$$= \langle \tilde{\Psi}^{(0)}_{p_1'p_2'p_3'},\, T\tilde{\Psi}^{(0)}_{p_1p_2p_3}\rangle. \tag{14.11}$$

Амплитуду упругого рассеяния частицы на связанном состоянии двух других частиц можно построить аналогичным образом. Для этого в формуле (14.8) нужно лишь заменить волновую функцию и обратную функцию Грина системы трех свободных частиц на соответствующие величины для случая, когда две из них находятся в связанном состоянии с импульсом P_α:

$$M_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}'; \mathbf{p}|P) = \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha'},\, \left(\left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1} - V_\alpha\right) \tilde{\Psi}^{(-)}_{P_\alpha p}\rangle =$$

$$= \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha'},\, (V - V_\alpha)\, \tilde{\Psi}^{(-)}_{P_\alpha p}\rangle. \tag{14.12}$$

Учитывая полученное ранее решение для волновой функции, отвечающей процессу развала связанного состояния двух частиц (14.6), можно записать:

$$M_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}'; \mathbf{p}|P) = \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha'},\, (V - V_\alpha)\, (1 - \tilde{G}^{(0)}V)^{-1}(1 - \tilde{G}^{(0)}V_\alpha)\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha}\rangle. \tag{14.13}$$

Во избежание недоразумения поясним, что хотя последний оператор в скобках, действуя на волновую функцию двухчастичного связанного состояния, формально как бы дает ноль в силу уравнения (5.15), этого не происходит, поскольку предыдущий оператор должен компенсировать его соответствующим полюсом. Перепишем выражение (14.13) в несколько ином виде:

$$M_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}'; \mathbf{p}|P) =$$

$$= \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\alpha}, \left(1 - V_\alpha \tilde{G}^{(0)}\right) \left[\tilde{G}^{(0)}\right]^{-1} (1 - \tilde{G}^{(0)} V)^{-1} (1 - \tilde{G}^{(0)} V_\alpha) \tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha} \rangle, \tag{14.14}$$

и воспользуемся формулой (14.10), тогда можно выразить амплитуду упругого рассеяния на связанном состоянии через амплитуду упругого рассеяния трех частиц (13.14):

$$M_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}'; \mathbf{p}|P) = \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\alpha}, \left(1 - V_\alpha \tilde{G}^{(0)}\right) T (1 - \tilde{G}^{(0)} V_\alpha) \tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha} \rangle. \tag{14.15}$$

В случае малой константы связи, разлагая выражение (14.13) до второго порядка включительно, получаем:

$$M_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}'; \mathbf{p}|P) \approx$$
$$\approx \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\alpha}, \left[(V - V_\alpha) + (V - V_\alpha)\tilde{G}^{(0)}(V - V_\alpha)\right] \tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha} \rangle. \tag{14.16}$$

Рассмотрим теперь процесс рассеяния на связанном состоянии с перестройкой, т. е. когда частица, рассеиваясь на связанном состоянии α, в результате столкновения выбивает одну из связанных частиц и при этом сама образует связанное состояние β с третьей частицей. Амплитуду такого процесса в соответсвии с (14.13) можно записать в виде:

$$M_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'; \mathbf{p}|P) = \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\beta}, (V - V_\beta) (1 - \tilde{G}^{(0)} V)^{-1} (1 - \tilde{G}^{(0)} V_\alpha) \tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha} \rangle. \tag{14.17}$$

В низшем приближении по потенциалу, казалось бы, имеем:

$$M_{\alpha\beta}(\mathbf{p}'; \mathbf{p}|P) \approx \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\beta}, (V - V_\beta) \tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha} \rangle. \tag{14.18}$$

Однако, мы должны заметить, что такое формальное разложение приводит к неправильному физическому результату.

Действительно, нетрудно понять, что при $V-V_\alpha-V_\beta=0$ процесс с перестройкой невозможен, и амплитуда $M_{\alpha\beta}$ должна зануляться, что явно не следует из (14.18). Поэтому для того, чтобы разложение по потенциалу было корректным, необходимо преобразвать амплитуду (14.17) следующим образом:

$$M_{\alpha\beta}(\mathbf{p}';\mathbf{p}|P)=\langle\tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\beta},\,(V-V_\beta)\,\tilde{\Psi}^{(-)}_{P_\alpha p}\rangle=$$

$$=\langle\tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\beta},\,\Big(V-V_\alpha-V_\beta+V_\alpha\tilde{G}^{(0)}V\Big)\,\tilde{\Psi}^{(-)}_{P_\alpha p}\rangle,\tag{14.19}$$

что справедливо в силу равенства

$$\langle\tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\beta},\,V_\alpha\Big(1-\tilde{G}^{(0)}V\Big)\,\tilde{\Psi}^{(-)}_{P_\alpha p}\rangle=0.\tag{14.20}$$

Тогда в низшем приближении из (14.19) следует

$$M_{\alpha\beta}(\mathbf{p}';\mathbf{p}|P)\approx\langle\tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\beta},\,(V-V_\alpha-V_\beta)\,\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\alpha}\rangle.\tag{14.21}$$

В качестве приложения изложенной выше техники мы рассмотрим упругое рассеяние электрона на заряженном пионе, который представляет собой связанное состояние кварка и антикварка, подробно изученное нами в предыдущих параграфах. Сильное взаимодействие кварка и антикварка будем описывать квазипотенциалом V_s, в то время как электрон взаимодействует с кварком и антикварком электомагнитным образом посредством квазипотенциалов V_{eq} и $V_{e\bar{q}}$. Кроме того, нужно помнить, что в рассматриваемой системе, вообще говоря, может присутствовать еще и собственно трехчастичное взаимодействие. Мы будем исходить из выражения (14.13) для амплитуды упругого рассеяния на связанном состоянии и затем преобразуем его, используя некоторые ранее выведенные нами соотношения между операторами квазипотенциалов и амплитуд:

$$M_{e\pi}(\mathbf{p}';\mathbf{p}|P) = \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\pi},\, (V-V_s)\,(1-\tilde{G}^{(0)}V)^{-1}(1-\tilde{G}^{(0)}V_s)\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\pi}\rangle =$$

$$= \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\pi},\, (V-V_s)\left[(1-\tilde{G}^{(0)}V_s)^{-1} - \right.$$

$$\left. -(1-\tilde{G}^{(0)}V_s)^{-1}\tilde{G}^{(0)}V\right]^{-1}\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\pi}\rangle =$$

$$= \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\pi},\, (V-V_s)\left[1-(1-\tilde{G}^{(0)}V_s)^{-1}\tilde{G}^{(0)}(V-V_s)\right]^{-1}\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\pi}\rangle =$$

$$= \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\pi},\, (V-V_s)\left[1-(1+\tilde{G}^{(0)}T_s)\tilde{G}^{(0)}(V-V_s)\right]^{-1}\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\pi}\rangle, \tag{14.22}$$

где $\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\pi}$ – одновременная волновая функция пиона, T_s – амплитуда упругого рассеяния кварка на антикварке вне энергетической поверхности, а $p = P - P_\pi$ и $p' = P - P'_\pi$ – начальный и конечный 4-импульсы электрона (P – полный сохраняющийся 4-импульс системы). Квазипотенциал $V - V_s$ содержит электромагнитное взаимодействие, и, более того, при условии малости константы этого взаимодействия также может оказаться малым, что позволяет провести разложение по нему амплитуды (14.22):

$$M_{e\pi}(\mathbf{p}';\mathbf{p}|P) = \langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\pi},\, (V-V_s)\,\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\pi}\rangle +$$

$$+\langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\pi},\, (V-V_s)\,\tilde{G}^{(0)}(V-V_s)\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\pi}\rangle +$$

$$+\langle \tilde{\Phi}^{(-)}_{P'_\pi},\, (V-V_s)\,\tilde{G}^{(0)}T_s\tilde{G}^{(0)}(V-V_s)\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\pi}\rangle + \ldots \tag{14.23}$$

Если пренебречь собственно трехчастичным взаимодействием ($V_0 \equiv 0$), то квазипотенциал $V - V_s = V_{eq} + V_{e\bar{q}}$ и в развернутом виде будет выглядеть следующим образом:

$$V_{eq}(\mathbf{p}';\mathbf{p}|P_{eq},\varepsilon_{P_{eq}})(2\pi)^3 2k_{\bar{q}}^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_{\bar{q}} - \mathbf{k}'_{\bar{q}}) +$$

$$+ V_{e\bar{q}}(\mathbf{p}';\mathbf{p}|P_{e\bar{q}},\varepsilon_{P_{e\bar{q}}})(2\pi)^3 2k_{q}^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_{q} - \mathbf{k}'_{q}). \qquad (14.24)$$

Волновая функция пиона в развернутом виде записывается так:

$$\tilde{\Phi}^{(-)}_{P_\pi}(\mathbf{k},\mathbf{k}_q) = (2\pi)^3 2k^0 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \tilde{\Phi}^{(-)}_{BP_\pi}(\mathbf{k}_q). \qquad (14.25)$$

Подставим эти выражения в формулу для амплитуды рассеяния (14.23) и, снимая частично интегрирования за счет трехмерных δ-функций, получим в низшем порядке по потенциалам электромагнитного взаимодействия следующее выражение:

$$M_{e\pi}(\mathbf{p}';\mathbf{p}|P) =$$

$$= \int d^3\omega_{\mathbf{k}_q} \frac{\varepsilon_{k_{\bar{q}}}}{\varepsilon_{k'_q}} \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{BP'_\pi}(\mathbf{k}'_q) V_{eq}(\mathbf{p}';\mathbf{p}|P_{eq},\varepsilon_{P_{eq}}) \tilde{\Phi}^{(-)}_{BP_\pi}(\mathbf{k}_q) +$$

$$+ \int d^3\omega_{\mathbf{k}_q} \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{BP'_\pi}(\mathbf{k}_q) V_{e\bar{q}}(\mathbf{p}';\mathbf{p}|P_{e\bar{q}},\varepsilon_{P_{e\bar{q}}}) \tilde{\Phi}^{(-)}_{BP_\pi}(\mathbf{k}_q), \qquad (14.26)$$

где в силу соотношений (13.3) и (13.6):

$$\begin{aligned} k_{\bar{q}} &= P_\pi - k_q - (\varepsilon_{P_\pi} - \varepsilon_{k_q} - \varepsilon_{k_{\bar{q}}})\lambda; \\ k'_q &= k_q + \Delta - (\varepsilon_{k_q} - \varepsilon_{k'_q} + \varepsilon_\Delta)\lambda; \\ k'_{\bar{q}} &= P'_\pi - k_q - (\varepsilon_{P'_\pi} - \varepsilon_{k_q} - \varepsilon_{k'_{\bar{q}}})\lambda, \end{aligned} \qquad (14.27)$$

где $\Delta = p - p' = P'_\pi - P_\pi$. Заметим, что при снятии интегралов за счет δ-функций со сложными аргументами следует воспользоваться таким же приемом, как в формуле (2.25).

Волновая функция пиона в соответствии с формулой (9.1) записывается в виде:

$$\tilde{\Phi}^{(-)}_{BP_\pi}(\mathbf{k}_q) = \frac{\bar{v}^{(+)}(k_q)\gamma^5 v^{(+)}(k_{\bar{q}})}{2\varepsilon_{k_{\bar{q}}}}\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q), \tag{14.28}$$

а квазипотенциалы взаимодействия электрона с кварком и антикварком с учетом общей структуры (9.2) обмена:

$$V_{eq}(\mathbf{p}'; \mathbf{p}|P_{eq}, \varepsilon_{P_{eq}}) = \frac{4\pi\alpha e_q}{\Delta^2}\bar{v}^{(+)}(p')\gamma_\mu v^{(-)}(p)\bar{v}_q^{(+)}(k'_q)\gamma^\mu v_q^{(-)}(k_q); \tag{14.29}$$

$$V_{e\bar{q}}(\mathbf{p}'; \mathbf{p}|P_{e\bar{q}}, \varepsilon_{P_{e\bar{q}}}) = \frac{4\pi\alpha e_{\bar{q}}}{\Delta^2}\bar{v}^{(+)}(p')\gamma_\mu v^{(-)}(p)\bar{v}_{\bar{q}}^{(-)}(k_{\bar{q}})\gamma^\mu v_{\bar{q}}^{(+)}(k'_{\bar{q}}), \tag{14.30}$$

где e_q и $e_{\bar{q}}$ – заряды кварка и антикварка в единицах e, соответственно.

Общая структура амплитуды упругого рассеяния электрона на заряженном пионе представляется в следующем виде:

$$M_{e\pi}(\mathbf{p}'; \mathbf{p}|P) = \frac{4\pi\alpha}{\Delta^2}\bar{v}^{(+)}(p')(\hat{P}'_\pi + \hat{P}_\pi)v^{(-)}(p)F(\Delta^2), \tag{14.31}$$

где $F(\Delta^2)$ – электромагнитный формфактор пиона. Подставляя теперь волновую функцию (14.28) и квазипотенциалы (14.29) и (14.30) в выражение (14.26), суммируя по поляризациям фермионов и вычисляя шпуры γ-матриц, а затем сравнивая с представлением (14.31), получим:

$$(\varepsilon_{P'_\pi} + \varepsilon_{P_\pi})F(\Delta^2) =$$

$$= e_q \int \frac{d^3\omega_{\mathbf{k}_q}}{2\varepsilon_{k'_q} 2\varepsilon_{k'_{\bar{q}}}} \Big\{ (\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k_{\bar{q}}})(\varepsilon_{k'_q} + \varepsilon_{k_{\bar{q}}})(\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k'_q}) +$$

$$+ \left[M_\pi^2 - (m_q - m_{\bar{q}})^2 - \varepsilon^2_{P'_\pi} \right] \varepsilon_{k_q} + \left[M_\pi^2 - (m_q - m_{\bar{q}})^2 - \varepsilon^2_{P_\pi} \right] \varepsilon_{k'_q} +$$

$$+ (\Delta^2 - \varepsilon^2_\Delta)\varepsilon_{k_{\bar{q}}} \Big\} \overset{*}{\varphi}_{P'_\pi} (\mathbf{k}'_q) \varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q) +$$

$$+ e_{\bar{q}} \int \frac{d^3\omega_{\mathbf{k}_q}}{2\varepsilon_{k_{\bar{q}}} 2\varepsilon_{k'_{\bar{q}}}} \Big\{ (\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k_{\bar{q}}})(\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k'_{\bar{q}}})(\varepsilon_{k_{\bar{q}}} + \varepsilon_{k'_{\bar{q}}}) +$$

$$+ \left[M_\pi^2 - (m_q - m_{\bar{q}})^2 - \varepsilon^2_{P'_\pi} \right] \varepsilon_{k_{\bar{q}}} + \left[M_\pi^2 - (m_q - m_{\bar{q}})^2 - \varepsilon^2_{P_\pi} \right] \varepsilon_{k'_{\bar{q}}} +$$

$$+ (\Delta^2 - \varepsilon^2_\Delta)\varepsilon_{k_q} \Big\} \overset{*}{\varphi}_{P'_\pi} (\mathbf{k}_q) \varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q), \qquad (14.32)$$

где мы воспользовались связями (14.27), из которых также следуют выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k'_q} &= \sqrt{(\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_\Delta)^2 - (k_q + \Delta)^2 + m_q^2}\,; \\ \varepsilon_{k_{\bar{q}}} &= \sqrt{(\varepsilon_{P_\pi} - \varepsilon_{k_q})^2 - (P_\pi - k_q)^2 + m_{\bar{q}}^2}\,; \qquad (14.33) \\ \varepsilon_{k'_{\bar{q}}} &= \sqrt{(\varepsilon_{P'_\pi} - \varepsilon_{k_q})^2 - (P'_\pi - k_q)^2 + m_{\bar{q}}^2}\,. \end{aligned}$$

Если положить $\lambda = P_\pi / M_\pi$ и пренебречь разностью масс кварка и антикварка, то $\varepsilon_{k_{\bar{q}}} = \varepsilon_{k_q}$, и формфактор принимает вид:

$$(1 - \Delta^2/4M_\pi^2) F(\Delta^2) =$$

$$= \frac{e_q}{2M_\pi} \int \frac{d^3\omega_{\mathbf{k}_q}}{2\varepsilon_{k'_q}} [(\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k'_q})^2 + \Delta^2(1 - \Delta^2/4M_\pi^2)] \overset{*}{\varphi}_{P'_\pi} (\mathbf{k}'_q) \varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q) +$$

$$+\frac{e_{\bar q}}{2M_\pi}\int\frac{d^3\omega_{\mathbf{k}_q}}{2\varepsilon_{k'_{\bar q}}}[(\varepsilon_{k_q}+\varepsilon_{k'_{\bar q}})^2+\Delta^2(1-\Delta^2/4M_\pi^2)]\overset{*}{\varphi}_{P'_\pi}(\mathbf{k}_q)\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q). \tag{14.34}$$

Таким образом, нам удалось выразить релятивистски инвариантный электромагнитный формфактор заряженного мезона, состоящего из кварка и антикварка, через одновременную волновую функцию мезона, удовлетворяющую квазипотенциальному уравнению (9.5), или (9.7). Задав квазипотенциал сильного взаимодействия V_s, можно попытаться решить это уравнение и вычислить явно формфактор мезона с помощью формулы (14.32). Посмотрим, как нормирован этот формфактор в точке $\Delta^2 = 0$. Из формулы (14.32) следует, что

$$2\varepsilon_{P_\pi}F(0) =$$

$$=\int\frac{d^3\omega_{\mathbf{k}_q}}{2\varepsilon_{k_{\bar q}}}\,[(\varepsilon_{k_q}+\varepsilon_{k_{\bar q}})^2+M_\pi^2-(m_q-m_{\bar q})^2-\varepsilon_{P_\pi}^2]|\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q)|^2, \tag{14.35}$$

и из условия нормировки волновой функции для случая независящего от энергии квазипотенциала следует, что
$F(0) = 1$. В отличие от формулы (9.8) здесь надо использовать условие нормировки волновой функции системы двух частиц с разными массами и при произвольном направлении вектора λ, которое несложно получить, используя формулы раздела 9.

15. Структурные функции мезона

В предыдущем параграфе мы исследовали электромагнитную структуру мезона, проявляющуюся в упругом рассеянии электрона на мезоне. Как мы видели, эта структура описывается формфактором, который определяется волновыми функциями мезона. При очень высоких энергиях столкновения, когда практически все реакции становятся неупругими, внутренняя структура составной частицы-мишени описывается так называемыми структурными функциями. В этом разделе, исходя опять же из выражения для амплитуды упругого рассеяния электрона на мезоне (14.23), мы найдем явный вид структурных функций мезона, выразив их через одновременные волновые функции мезона.

Рассмотрим второе слагаемое в разложении (14.23). Подставим в него квазипотенциал в виде (14.24) и волновую функцию в форме (14.25). В результате после снятия части интегралов эта часть амплитуды упругого рассеяния примет вид:

$$M^{(2)}_{e\pi}(\mathbf{p}\,';\mathbf{p}|P) =$$

$$= \int d^3\omega_{\mathbf{k}} \int d^3\omega_{\mathbf{k}_q}\ \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{BP'_\pi}(\mathbf{k}'_q)\times$$

$$\times \frac{2\varepsilon_{k_{\bar{q}}} V_{eq}(\mathbf{p}\,';\mathbf{k}|P_{eq},\varepsilon_{P_{eq}}) V_{eq}(\mathbf{k};\mathbf{p}|P_{eq},\varepsilon_{P_{eq}})}{2\varepsilon_{k'_q} 2\varepsilon_{k''_q}(\varepsilon_k + \varepsilon_{k''_q} + \varepsilon_{k_{\bar{q}}} - \varepsilon_P - i0)} \tilde{\Phi}^{(-)}_{BP_\pi}(\mathbf{k}_q) +$$

$$+ \int d^3\omega_{\mathbf{k}} \int d^3\omega_{\mathbf{k}_q}\ \overset{*}{\tilde{\Phi}}{}^{(+)}_{BP'_\pi}(\mathbf{k}_q)\times$$

$$\times \frac{V_{e\bar{q}}(\mathbf{p}\,';\mathbf{k}|P_{e\bar{q}},\varepsilon_{P_{e\bar{q}}}) V_{e\bar{q}}(\mathbf{k};\mathbf{p}|P_{e\bar{q}},\varepsilon_{P_{e\bar{q}}})}{2\varepsilon_{k''_{\bar{q}}}(\varepsilon_k + \varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k''_{\bar{q}}} - \varepsilon_P - i0)} \tilde{\Phi}^{(-)}_{BP_\pi}(\mathbf{k}_q). \qquad (15.1)$$

Мы оставили лишь два слагаемых из четырех, предполагая, что при достаточно высоких энергиях электрон успевает провзаимодействовать либо с кварком, либо с антикварком (импульсное приближение). Как обычно, здесь имеются следующие связи между 4-импульсами кварков и антикварков:

$$\begin{aligned} k_q + k_{\bar q} - (\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k_{\bar q}})\lambda &= P_\pi - \varepsilon_{P_\pi}\lambda; \\ k'_q + k'_{\bar q} - (\varepsilon_{k'_q} + \varepsilon_{k'_{\bar q}})\lambda &= P'_\pi - \varepsilon_{P'_\pi}\lambda, \end{aligned} \tag{15.2}$$

а кроме того в силу (13.3) в подынтегральном выражении первого слагаемого следует положить:

$$\begin{aligned} k''_q - \varepsilon_{k''_q}\lambda &= k_q + p - k - (\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_p - \varepsilon_k)\lambda; \\ k'_q - \varepsilon_{k'_q}\lambda &= k_q + \Delta - (\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_\Delta)\lambda, \end{aligned} \tag{15.3}$$

а во втором слагаемом –

$$\begin{aligned} k''_{\bar q} - \varepsilon_{k''_{\bar q}}\lambda &= P - k - k_q - (\varepsilon_P - \varepsilon_k - \varepsilon_{k_q})\lambda; \\ k'_{\bar q} - \varepsilon_{k'_{\bar q}}\lambda &= P - p' - k_q - (\varepsilon_P - \varepsilon_{p'} - \varepsilon_{k_q})\lambda, \end{aligned} \tag{15.4}$$

Подставим теперь в выражение (15.1) волновую функцию в форме (14.28) и квазипотенциалы в виде (14.29) и (14.30). После суммирования по поляризациям и вычисления шпуров γ-матриц получим:

$$M^{(2)}_{e\pi}(\mathbf{p}\,'; \mathbf{p}|P) = \int d^3\omega_{\mathbf{k}}\, \frac{(4\pi\alpha)^2 \bar v^{(+)}(p')\gamma_\mu(\hat k + m_e)\gamma_\nu v^{(-)}(p)}{(p-k)^2(k-p')^2} \times$$

$$\times\{e_q^2 \int \frac{d^3\omega_{\mathbf{k}_q}}{2\varepsilon_{k'_q} 2\varepsilon_{k''_q}}\, \frac{A^{\mu\nu}(k'_q; k_q|P - k_{\bar q})}{2\varepsilon_{k_{\bar q}}(\varepsilon_k + \varepsilon_{k''_q} + \varepsilon_{k_{\bar q}} - \varepsilon_P - i0)}\, \overset{*}{\varphi}_{P'_\pi}(\mathbf{k}'_q)\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q) +$$

$$+e_{\bar q}^2 \int \frac{d^3\omega_{\mathbf{k}_q}}{2\varepsilon_{k_{\bar q}} 2\varepsilon_{k'_{\bar q}}} \frac{A^{\mu\nu}(k'_{\bar q}; k_{\bar q}|P-k_q)}{2\varepsilon_{k''_{\bar q}}(\varepsilon_k+\varepsilon_{k_q}+\varepsilon_{k''_{\bar q}}-\varepsilon_P - i0)} \overset{*}{\varphi}_{P'_\pi}(\mathbf{k}_q)\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q)\}, \tag{15.5}$$

где m_e – масса электрона, а тензор $A^{\mu\nu}$ – это явно вычисленный шпур, получающийся после суммирования по поляризациям:

$$\begin{gathered}
A^{\mu\nu}(k'_q; k_q|P-k_{\bar q}) = 2(m_q^2 - k'_q k''_q)2(m_q m_{\bar q} + k_q k_{\bar q})g^{\mu\nu} + \\
+2(m_q^2 - k_q k''_q)2(m_q m_{\bar q} + k'_q k_{\bar q})g^{\mu\nu} - \\
-2(m_q^2 - k_q k'_q)2(m_q m_{\bar q} + k''_q k_{\bar q})g^{\mu\nu} + \\
+2(m_q m_{\bar q} + k_q k_{\bar q})2(k_q'^\mu k_q''^\nu + k_q'^\nu k_q''^\mu) + \\
+2(m_q m_{\bar q} + k'_q k_{\bar q})2(k_q^\mu k_q''^\nu + k_q^\nu k_q''^{\mu)} - \\
-2(m_q m_{\bar q} + k''_q k_{\bar q})2(k_q^\mu k_q'^\nu - k_q^\nu k_q'^\mu) + 2(m_q^2 - k_q k'_q)2(k_q''^\mu k_{\bar q}^\nu + k_q''^\nu k_{\bar q}^\mu) + \\
+2(m_q^2 - k_q k''_q)2(k_q'^\mu k_{\bar q}^\nu - k_q'^\nu k_{\bar q}^\mu) - 2(m_q^2 - k'_q k''_q)2(k_q^\mu k_{\bar q}^\nu - k_q^\nu k_{\bar q}^\mu).
\end{gathered} \tag{15.6}$$

Выражение для аналогичного тензора во втором интеграле формулы (15.5) получается из только что приведенного заменой кварка на антикварк и наоборот.

Далее, как всегда, удобно перейти к конкретному выбору вектора λ, положив его равным P_π/M_π. Тогда первое соотношение (15.2) принимает вид:

$$k_q + k_{\bar q} - (\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k_{\bar q}})\lambda = 0, \tag{15.7}$$

а соотношения (15.4) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
k''_{\bar q} - \varepsilon_{k''_{\bar q}}\lambda &= p - k - k_q - (\varepsilon_p - \varepsilon_k - \varepsilon_{k_q})\lambda; \\
k'_{\bar q} - \varepsilon_{k'_{\bar q}}\lambda &= \Delta - k_q - (\varepsilon_\Delta - \varepsilon_{k_q})\lambda.
\end{aligned} \tag{15.8}$$

Кроме того, воспользовавшись связями (15.7) и (15.3), в подынтегральном выражении первого слагаемого формулы (15.5) следует положить:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k_{\bar q}} &= \sqrt{\varepsilon_{k_q}^2 - m_q^2 + m_{\bar q}^2};\\
\varepsilon_{k_q''} &= \sqrt{(\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_p - \varepsilon_k)^2 - (k_q + p - k)^2 + m_q^2};\\
\varepsilon_{k_q'} &= \sqrt{(\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_\Delta)^2 - (k_q + \Delta)^2 + m_q^2}.
\end{aligned} \tag{15.9}$$

а во втором слагаемом в силу (15.7) и (15.8) –

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k_{\bar q}} &= \sqrt{\varepsilon_{k_q}^2 - m_q^2 + m_{\bar q}^2};\\
\varepsilon_{k_{\bar q}''} &= \sqrt{(\varepsilon_{k_q} - \varepsilon_p + \varepsilon_k)^2 - (k_q - p + k)^2 + m_{\bar q}^2};\\
\varepsilon_{k_{\bar q}'} &= \sqrt{(\varepsilon_{k_q} - \varepsilon_\Delta)^2 - (k_q - \Delta)^2 + m_{\bar q}^2}.
\end{aligned} \tag{15.10}$$

Таким образом, нам удалось выразить все 4-импульсы в подынтегральных выражениях (15.5) через импульсы k_q, k, p и Δ.

Обратимся теперь к условию унитарности для амплитуды упругого рассеяния электрона на пионе. Рассмотрим рассеяние вперед, когда $p' = p$, и перепишем формулу (6.8) для этого случая:

$$\langle p, P_\pi|T|p, P_\pi\rangle - \langle p, P_\pi|T|p, P_\pi\rangle^+ =$$

$$= i\int d^3\omega_{\mathbf{k}} \sum\!\!\!\!\!\!\int_{P_n} \langle k, P_n|T|p, P_\pi\rangle^+ \langle k, P_n|T|p, P_\pi\rangle, \tag{15.11}$$

где k – 4-импульс электрона в промежуточном состоянии, а P_n – набор 4-импульсов всех остальных рождающихся в результате столкновения частиц. Вводя амплитуду упругого рассеяния по формуле (3.16) и аналогично амплитуду множественного рождения:

$$\langle k, P_n|T|p, P_\pi\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k + P_n - P)M_{e\pi\to eX}(\mathbf{k}, P_{n-1}; \mathbf{p}|P), \tag{15.12}$$

получаем:

$$M_{e\pi}(\mathbf{p}; \mathbf{p}|P) - \overset{+}{M}_{e\pi}(\mathbf{p}; \mathbf{p}|P) =$$

$$= i\int d^3\omega_{\mathbf{k}} \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_{P_n} \Big[(2\pi)^4\delta^{(4)}(k + P_n - P)\times$$

$$\times \overset{+}{M}_{e\pi\to eX}(\mathbf{k}, P_{n-1}; \mathbf{p}|P)M_{e\pi\to eX}(\mathbf{k}, P_{n-1}; \mathbf{p}|P)\Big]. \tag{15.13}$$

Нетрудно видеть, что внутренний интеграл по фазовому объему всех рождающихся частиц и суммирование по числу частиц в (15.13) определяет дифференциальное сечение инклюзивного рассеяния электрона на пионе:

$$\frac{d^3\sigma}{d^3\omega_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{4M_\pi\sqrt{\varepsilon_p^2 - m^2}} \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_{P_n} \Big[(2\pi)^4\delta^{(4)}(k + P_n - P)\times$$

$$\times \overset{+}{M}_{e\pi\to eX}(\mathbf{k}, P_{n-1}; \mathbf{p}|P)M_{e\pi\to eX}(\mathbf{k}, P_{n-1}; \mathbf{p}|P)\Big]. \tag{15.14}$$

Если ограничиться низшим приближением по константе электромагнитного взаимодействия, т. е. однофотонным обменом, то амплитуду множественного рождения можно записать следующим образом:

$$M_{e\pi\to eX}(\mathbf{k}, P_{n-1}; \mathbf{p}|P) =$$

$$= \frac{4\pi\alpha\bar{v}^{(+)}(k)\gamma_\mu v^{(-)}(p)}{(p-k)^2} A^\mu(P_{n-1}; p-k|P-k), \tag{15.15}$$

где амплитуда A^{μ}, очевидно, описывает множественное рождение частиц в результате столкновения виртуального фотона с импульсом $q = p - k$ и мезона. Подставляя (15.15) в инклюзивное сечение (15.14) получаем:

$$\frac{d^3\sigma}{d^3\omega_{\mathbf{k}}} = \frac{(4\pi\alpha)^2\bar{v}^{(+)}(p)\gamma_{\mu}(\hat{k}+m)\gamma_{\nu}v^{(-)}(p)}{4M_{\pi}\sqrt{\varepsilon_p^2 - m^2}\,[(p-k)^2]^2} W^{\mu\nu}(p-k, P_{\pi}), \tag{15.16}$$

где, очевидно, тензор

$$W^{\mu\nu}(q, P_{\pi}) =$$

$$= \sum_{P_n}\!\!\!\!\!\!\int (2\pi)^4\delta^{(4)}(P_n - q - P_{\pi}) \overset{+}{A}{}^{\mu}(P_{n-1}; q|q+P_{\pi})A^{\nu}(P_{n-1}; q|q+P_{\pi}). \tag{15.17}$$

Тензор $W^{\mu\nu}$ называется структурным тензором, поскольку он связан с процессами множественного рождения частиц, а они, в свою очередь, интерпретируются как процессы диссоциации мезона, как бы составленного из так называемых партонов, которые отождествляются со всеми родившимися частицами. Если ограничиться только сильными взаимодействиями, то рождаться будут только кварки и глюоны, которые в результате так называемой адронизации образуют струи реальных частиц в конечном состоянии неупругого процесса. Из формулы (15.16) можно видеть, что этот тензор определяет отклонение сечения инклюзивного рассеяния электрона на составном мезоне от сечения рассеяния на точечной частице.

Условие унитарности для амплитуды рассеяния вперед (15.13) теперь можно записать так:

$$M_{e\pi}(\mathbf{p}; \mathbf{p}|P) - \overset{+}{M}_{e\pi}(\mathbf{p}; \mathbf{p}|P) =$$

$$= i \int d^3\omega_{\mathbf{k}} \frac{(4\pi\alpha)^2 \bar{v}^{(+)}(p)\gamma_\mu(\hat{k}+m)\gamma_\nu v^{(-)}(p)}{[(p-k)^2]^2} W^{\mu\nu}(p-k, P_\pi). \tag{15.18}$$

Подставляя сюда вычисленную ранее в низшем приближении амплитуду упругого рассеяния электрона на составном мезоне (15.5), получаем явное выражение для структурного тензора в нашем случае, когда мезон состоит из двух партонов – кварка и антикварка:

$$W^{\mu\nu}(q, P_\pi) = \frac{e_q^2}{2} \int d^3\omega_{\mathbf{k}_q} \Bigg[2\pi\delta(\varepsilon_{k''_q} + \varepsilon_{k_{\bar{q}}} - \varepsilon_q - M_\pi) \times$$

$$\times \frac{A^{\mu\nu}(k_q; k_q | P - k_{\bar{q}})}{2\varepsilon_{k_q} 2\varepsilon_{k_{\bar{q}}} 2\varepsilon_{k''_q}} |\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q)|^2 \Bigg] +$$

$$+ \frac{e_{\bar{q}}^2}{2} \int d^3\omega_{\mathbf{k}_q}\, 2\pi\delta(\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k''_{\bar{q}}} - \varepsilon_q - M_\pi) \frac{A^{\mu\nu}(k_{\bar{q}}; k_{\bar{q}} | P - k_q)}{(2\varepsilon_{k_{\bar{q}}})^2 2\varepsilon_{k''_{\bar{q}}}} |\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q)|^2, \tag{15.19}$$

где, как обычно, $\varepsilon_q = (\lambda q) = (\lambda p) - (\lambda k)$. С учетом формул (15.3) и (15.7) тензор $A^{\mu\nu}$ можно записать следующим образом:

$$A^{\mu\nu}(k_q; k_q | P - k_{\bar{q}}) = \tag{15.20}$$

$$= 8(m_q m_{\bar{q}} + k_q k_{\bar{q}}) \left[(m_q^2 - k_q k''_q) g^{\mu\nu} + k_q^\mu k''^\nu_q + k_q^\nu k''^\mu_q) \right].$$

В общем случае тензор (15.19) имеет следующую лоренцеву структуру:

$$W^{\mu\nu}(q, P_\pi) = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{F_1(q^2, \varepsilon_q)}{2M_\pi} +$$

$$+ \left(\lambda^\mu - \frac{\varepsilon_q}{q^2} q^\mu \right) \left(\lambda^\nu - \frac{\varepsilon_q}{q^2} q^\nu \right) \frac{F_2(q^2, \varepsilon_q)}{\sqrt{\varepsilon_q^2 - q^2}}. \tag{15.21}$$

где $F_i(q^2, \varepsilon_q)$ – скалярные функции, которые называют структурными функциями мезона. Для того чтобы вычислить эти структурные функции, удобно сначала построить следующие скаляры:

$$V_1(q^2, \varepsilon_q) = g_{\mu\nu} W^{\mu\nu}(q, P_\pi); \tag{15.22}$$

$$V_2(q^2, \varepsilon_q) = \lambda_\mu \lambda_\nu W^{\mu\nu}(q, P_\pi), \tag{15.23}$$

которые, очевидно, следующим образом связаны со структурными функциями:

$$\frac{1}{M_\pi} F_1(q^2, \varepsilon_q) = -V_1(q^2, \varepsilon_q) - \frac{q^2}{\varepsilon_q^2 - q^2} V_2(q^2, \varepsilon_q); \tag{15.24}$$

$$\frac{2\sqrt{\varepsilon_q^2 - q^2}}{q^2} F_2(q^2, \varepsilon_q) = V_1(q^2, \varepsilon_q) + \frac{3q^2}{\varepsilon_q^2 - q^2} V_2(q^2, \varepsilon_q). \tag{15.25}$$

В дальнейшем, исключительно для упрощения формул, мы будем пренебрегать разностью масс кварка и антикварка, т. е. положим $m_{\bar{q}} = m_q$. В этом случае из формул (15.9) и (15.10) следует, что под интегралами в выражении (15.19) мы можем положить $\varepsilon_{k_{\bar{q}}} = \varepsilon_{k_q}$. Подставляя выражение для шпура (15.20) в структурный тензор (15.19), нетрудно вычислить:

$$\begin{aligned} V_1(q^2, \varepsilon_q) = 2 \int d^3\omega_{\mathbf{k}_q} \Bigg[& \frac{2\pi e_q^2}{2\varepsilon_{k''_q}} \delta(\varepsilon_{k''_q} + \varepsilon_{k_{\bar{q}}} - \varepsilon_q - M_\pi) + \\ & + \frac{2\pi e_{\bar{q}}^2}{2\varepsilon_{k''_{\bar{q}}}} \delta(\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k''_{\bar{q}}} - \varepsilon_q - M_\pi) \Bigg] \times \\ & \times \Big[(2\varepsilon_{k_q})^2 - 2(\varepsilon_q + M_\pi) 2\varepsilon_{k_q} + q^2 + \\ & + 2M_\pi \varepsilon_q + M_\pi^2 + 2m_q^2 \Big] |\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q)|^2; \end{aligned} \tag{15.26}$$

$$V_2(q^2, \varepsilon_q) = (q^2 + 2M_\pi \varepsilon_q + M_\pi^2)\times$$
$$\times \int d^3\omega_{\mathbf{k}_q} \left[\frac{2\pi e_q^2}{2\varepsilon_{k''_q}} \delta(\varepsilon_{k''_q} + \varepsilon_{k_{\bar q}} - \varepsilon_q - M_\pi) + \right.$$
$$\left. + \frac{2\pi e_{\bar q}^2}{2\varepsilon_{k''_{\bar q}}} + \delta(\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k''_{\bar q}} - \varepsilon_q - M_\pi) \right] |\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q)|^2. \qquad (15.27)$$

Обычно при рассмотрении инклюзивного рассеяния электрона на адроне вводят следующие инвариантные переменные:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -q^2; \\ \nu &= \varepsilon_q = \frac{qP}{M_\pi}; \\ W^2 &= (q + P_\pi)^2 = q^2 + 2M_\pi \nu + M_\pi^2. \end{aligned} \qquad (15.28)$$

В системе покоя мезона переменная $\nu = p^0 - p'^0$, т. е. равна переданной энергии от начального электрона конечному, а W^2 равна квадрату инвариантной массы рождающейся адронной струи и поэтому является непосредственным мерилом неупругости процесса.

Используя (15.9) и (15.10), δ-функции под интегралами (15.26) и (15.27) можно преобразовать следующим образом:

$$\delta(\varepsilon_{k''_q} + \varepsilon_{k_q} - \varepsilon_q - M_\pi) = 2\varepsilon_{k''_q} \delta\left[\varepsilon_{k''_q}^2 - (\nu + M_\pi - \varepsilon_{k_q})^2\right] =$$
$$= 2\varepsilon_{k''_q} \delta\left[2qk_q - (2\nu + M_\pi)2\varepsilon_{k_q} + W^2\right], \qquad (15.29)$$

$$\delta(\varepsilon_{k_q} + \varepsilon_{k''_{\bar q}} - \varepsilon_q - M_\pi) = 2\varepsilon_{k''_{\bar q}} \delta\left[\varepsilon_{k''_{\bar q}}^2 - (\nu + M_\pi - \varepsilon_{k_q})^2\right] =$$
$$= 2\varepsilon_{k''_{\bar q}} \delta(2qk_q + M_\pi 2\varepsilon_{k_q} - W^2). \qquad (15.30)$$

Сделав указанные преобразования в интегралах формул (15.26) и (15.27) и подставив их в выражения (15.24) и (15.25), можно вычислить структурные функции мезонов:

$$F_1(Q^2,\nu) = M_\pi \int d^3\omega_{\mathbf{k}_q}\, \Big\{2\pi e_q^2 \delta\left[2qk_q - (2\nu + M_\pi)2\varepsilon_{k_q} + W^2\right] +$$
$$+2\pi e_{\bar{q}}^2 \delta(2qk_q + M_\pi 2\varepsilon_{k_q} - W^2)\Big\} \times$$
$$\times \left[8\varepsilon_{k_q}(\nu + M_\pi - \varepsilon_{k_q}) - 4m_q^2 - \frac{(2\nu^2 + Q^2)W^2}{\nu^2 + Q^2}\right] |\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q)|^2; \tag{15.31}$$

$$F_2(Q^2,\nu) = \frac{Q^2}{2\sqrt{\nu^2 + Q^2}} \times$$
$$\times \int d^3\omega_{\mathbf{k}_q}\, \Big\{2\pi e_q^2 \delta\left[2qk_q - (2\nu + M_\pi)2\varepsilon_{k_q} + W^2\right] +$$
$$+2\pi e_{\bar{q}}^2 \delta(2qk_q + M_\pi 2\varepsilon_{k_q} - W^2)\Big\} \times$$
$$\times \left[8\varepsilon_{k_q}(\nu + M_\pi - \varepsilon_{k_q}) - 4m_q^2 - \frac{(2\nu^2 - Q^2)W^2}{\nu^2 + Q^2}\right] |\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q)|^2. \tag{15.32}$$

В силу релятивистской инвариантности волновая функция $\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q)$ должна зависеть только от скалярного произведения (Pk_q), поэтому мы введем обозначение

$$\varphi_{P_\pi}(\mathbf{k}_q) = \phi(\varepsilon_{k_q}) \tag{15.33}$$

и проинтегрируем по сферическим углам между векторами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}_q$ в формулах (15.31) и (15.32), используя δ-функции:

$$F_1(Q^2,\nu) = \frac{2M_\pi(e_q^2 + e_{\bar{q}}^2)}{16\pi\sqrt{\nu^2 + Q^2}} \times$$

$$\times \int\limits_{\varepsilon_-}^{\varepsilon_+} d\varepsilon_{k_q} \left[8\varepsilon_{k_q}(\nu + M_\pi - \varepsilon_{k_q}) - 4m_q^2 - \frac{(2\nu^2 + Q^2)W^2}{\nu^2 + Q^2} \right] |\phi(\varepsilon_{k_q})|^2; \tag{15.34}$$

$$F_2(Q^2, \nu) = \frac{Q^2(e_q^2 + e_{\bar{q}}^2)}{16\pi(\nu^2 + Q^2)} \times$$

$$\times \int\limits_{\varepsilon_-}^{\varepsilon_+} d\varepsilon_{k_q} \left[8\varepsilon_{k_q}(\nu + M_\pi - \varepsilon_{k_q}) - 4m_q^2 - \frac{(2\nu^2 - Q^2)W^2}{\nu^2 + Q^2} \right] |\phi(\varepsilon_{k_q})|^2, \tag{15.35}$$

где пределы интегрирования по ε_{k_q} имеют следующий вид:

$$2\varepsilon_\pm = \nu + M_\pi \pm \gamma\sqrt{\nu^2 + Q^2}, \tag{15.36}$$

причем

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{W^2}}. \tag{15.37}$$

В выражениях для структурных функций (15.34) и (15.35) встречаются три стандартных переменных Q^2, ν и W^2, которые связаны между собой третьим из соотношений (15.28), поэтому только две переменные являются независимыми. Наиболее распространенным является выбор в качестве двух независимых переменных Q^2 и безразмерной масштабной переменной (переменная Бьеркена)

$$x = \frac{Q^2}{2M_\pi \nu}. \tag{15.38}$$

Часто используют также в качестве масштабной переменной переменную Нахтмана ξ, которую можно определить следующим образом:

$$\xi = \frac{\sqrt{\nu^2 + Q^2} - \nu}{M_\pi} = \frac{Q^2}{M_\pi(\sqrt{\nu^2 + Q^2} + \nu)}. \tag{15.39}$$

Она связана с переменной Бьеркена соотношением:

$$x = \xi\, \frac{W^2 - (1-\xi)M_\pi^2}{W^2 - (1-\xi^2)M_\pi^2}. \tag{15.40}$$

Пределы интегрирования (15.36) простым образом выражаются через переменную Нахтмана:

$$\varepsilon_\pm = \frac{m_q}{2}\left[\frac{2m_q}{(1\mp\gamma)(1-\xi)M_\pi} + \frac{(1\mp\gamma)(1-\xi)M_\pi}{2m_q}\right]. \tag{15.41}$$

Рассмотрим теперь область так называемого глубоконеупругого рассеяния электрона на мезоне, когда $W^2 \gg M_\pi^2$, а величина масштабной переменной x фиксирована на интервале (0,1). Нетрудно видеть из (15.40), что переменные x и ξ в этом случае практически совпадают, а структурная функция (15.34) принимает вид:

$$F_1(x, Q^2) = \frac{(e_q^2 + e_{\bar{q}}^2)M_\pi}{2\pi}\times$$

$$\times \int\limits_{\varepsilon_{min}}^{Q^2/2xM_\pi} d\varepsilon_{k_q}\left[2\varepsilon_{k_q}\left(1 - \frac{2xM_\pi}{Q^2}\varepsilon_{k_q}\right) - (1-x)M_\pi\right]|\phi(\varepsilon_{k_q})|^2, \tag{15.42}$$

где

$$\varepsilon_{min} = \frac{m_q}{2}\left[\frac{m_q}{(1-x)M_\pi} + \frac{(1-x)M_\pi}{m_q}\right]. \tag{15.43}$$

Вторая структурная функция (15.35)

$$F_2(x, Q^2) = x\, F_1(x, Q^2), \tag{15.44}$$

т. е. связана с первой соотношением, имеющем место в модели спинорных партонов.

Если волновая функция мезона достаточно быстро убывает при $\varepsilon_{k_q} \to \infty$, то в выражении (15.42) можно перейти к пределу $Q^2 \to \infty$ и таким образом получить асимптотическое выражение для структурной функции, которое зависит только от масштабной переменной:

$$F_2^{sc}(x) = \frac{(e_q^2 + e_{\bar{q}}^2) M_\pi}{2\pi} x \int\limits_{\varepsilon_{min}}^{\infty} d\varepsilon_{k_q} \left[2\varepsilon_{k_q} - (1-x)M_\pi\right] |\phi(\varepsilon_{k_q})|^2. \tag{15.45}$$

В этом случае говорят, что при очень высоких энергиях в глубоконеупругом рассеянии имеет место явление скейлинга, или масштабной инвариантности структурных функций.

Таким образом, в рамках квазипотенциального подхода получаются достаточно простые формулы для структурных функций мезона, отражающие, с одной стороны, основные черты партонной модели, и, с другой стороны, учитывающие эффекты связанности в составной системе, заключенные в релятивистской волновой функции. Важно подчеркнуть, что характер нарушения масштабной инвариантности в предасимптотической области полностью определяется поведением этой волновой функции, которая может быть получена как решение квазипотенциального уравнения в случае реалистического задания квазипотенциала взаимодействия кварка и антикварка.

Заключение

На протяжении более чем 40 лет с помощью квазипотенциального подхода Логунова-Тавхелидзе было получено множество результатов при исследовании различных аспектов физики релятивистских частиц: упругое рассеяние, эксклюзивные и инклюзивные процессы, спектры и формфакторы составных систем, распады нестабильных частиц и пр. В многочисленных публикациях, вышедших за это время, авторы продемонстрировали эффективность этого подхода, его наглядность и адекватность физической картине релятивистских взаимодействий. Все это говорит том, что давно назрела необходимость выпуска специальной монографии, посвященной последовательному изложению квазипотенциального метода в теории частиц и обзору результатов его применения. Такое издание позволило бы собрать все наиболее яркие достижения, полученные в рамках данного подхода, и более эффективно и последовательно обучать студентов и аспирантов, специализирующихся в этом направлении.

В настоящем пособии содержится лишь попытка краткого введения в квазипотенциальный метод описания взаимодействия релятивистских частиц, изложена концепция его построения и приведены некоторые простейшие примеры его применения. Понятно, что в небольшом курсе лекций невозможно охватить все аспекты этого эффективного подхода и, тем более, все даже наиболее существенные результаты. Тем не менее, опыт чтения таких лекций студентам 5-го курса физического факультета МГУ и СамГУ показал, что они могут служить естественным дополнением к стандартным курсам квантовой теории поля и физики элементарных частиц, хорошо воспринимаются и усваиваются студентами.

В данных лекциях при выводе основных положений квазипотенциального подхода мы особо старались продемонстрировать, что он основывается на общих методах и принципах локальной квантовой теории поля, таких как релятивистская инвариантность, законы сохранения, унитарность, микропричинность и др. Существенной особенностью изложения является построение релятивистской теории частиц на пространственно-подобной трехмерной гиперповерхности в пространстве Минковского. Это достигается путем использования процедуры проектирования и сглаживания в пределах выбранной пространственно-подобной гиперповерхности. Предлагаемая схема представляет собой ковариантное обобщение известной процедуры приравнивания времен, которая лежит в основе одновременной формулировки квантовой теории поля и квазипотенциального подхода.

В лекциях подчеркивается особая привлекательность квазипотенциального метода – это возможность описания взаимодействия релятивистских систем на привычном языке волновой функции, которая, как и в нерелятивистской теории, удовлетворяет трехмерному динамическому уравнению (релятивистскому аналогу уравнения Шредингера) с физическими граничными условиями и допускает вероятностную интерпретацию. Ядро трехмерного динамического уравнения - квазипотенциал -представляет собой релятивистское обобщение классического потенциала и, как показано в общем случае и на конкретных примерах, отражает ряд эффектов, характерных для релятивистской физики. При этом явная аналогия описания релятивистских систем на базе трехмерного динамического уравнения с нерелятивистской картиной взаимодействия оказывается крайне полезной, поскольку позволяет использовать чисто эмпирические соображения классической физики при построении квазипотенциала взаимодействия.

Автор искренне признателен ректору Самарского государственного университета профессору Г.П. Яровому и заведующему кафедрой общей и теоретической физики профессору А.А. Бирюкову за предоставленную возможность прочитать этот специальный курс лекций студентам и аспирантам СамГУ, а также за предложение издать это учебное пособие в издательстве «Самарский университет». Глубокая благодарность преподавателю кафедры общей и теоретической физики Э.Н. Воробьевой за подготовку макета издания и большую корректорскую работу.

Библиографический список

1. Боголюбов,Н.Н., Ширков,Д.В.. Введение в теорию квантованных полей/Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков – М.: Наука, 1976.

2. Гольдбергер,М., Ватсон,К. Теория столкновений/М. Гольдбергер, К. Ватсон. – М.: Мир, 1967.

3. Фейнман,Р. Взаимодействие фотонов с адронами/Р. Фейнман. – М.: Мир, 1975.

4. Logunov,A.A., Tavkhelidze,A.N. Quasipotential approach in quantum field theory/A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze//Nuovo Cimento **29**, P. 380, 1963.

5. Кадышевский,В.Г., Тавхелидзе,А.Н. Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче двух тел/В.Г. Кадышевский, А.Н. Тавхелидзе//Проблемы теоретической физики. – М.: Наука, 1969 – С. 261.

6. Логунов,А.А., Хрусталев,О.А. К проблеме двух тел в квантовой теории поля/А.А. Логунов, О.А. Хрусталев.В сб.//Проблемы теоретической физики. – М.: Наука, 1972 – С. 96.

7. Кадышевский,В.Г., Мир-Касимов,Р.М., Скачков,Н.Б. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел/В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков. ЭЧАЯ, **2**, 1972, С. 635.

8. Faustov,R.N. Relativistic wave function and form-factors of the bound system/R.N. Faustov// Annals of Physics, **78**, 1973, P. 176.

9. Саврин,В.И., Тюрин,Н.Е. Хрусталев,О.А. Метод U-матрицы в теории сильных взаимодействий/В.И. Саврин, Н.Е. Тюрин, О.А. Хрусталев// ЭЧАЯ, **7**, 1976, С. 21.

10. Скачков,Н.Б., Соловцов,И.Л. Релятивистское трехмерное описание взаимодействия двух фермионов/Н.Б. Скачков, И.Л. Соловцов// ЭЧАЯ, **9**, 1978, С. 5.

11. Саврин,В.И., Скачков,Н.Б. Формфакторы и структурные функции адронов в одновременной формулировке квантовой теории поля/В.И. Саврин, Н.Б. Скачков// Труды V международного семинара по физике высоких энергий и теории поля. – Протвино: ИФВЭ, 1982, Т. II, С. 229.

12. Архипов,А.А., Саврин,В.И. Асимптотическое условие LSZ и динамические уравнения в квантовой теории поля/А.А. Архипов, В.И. Саврин// ЭЧАЯ, 1985, **16**, С. 1091.

13. Архипов,А.А. Принцип причинности в проблеме одновременной редукции в квантовой теории поля/А.А. Архипов// ТМФ, 1988, **74**, С. 69,
Архипов,А.А. Одновременная редукция формализма Бете-Солпитера для двухфермионной системы/А.А. Архипов// ТМФ, 1990, **83**, С. 247.

14. Саврин,В.И., Скачков,Н.Б. Трехмерная ковариантная формулировка релятивистской теории связанных состояний/В.И. Саврин, Н.Б. Скачков// Труды V школы молодых ученых по квантовой теория поля и физике высоких энергий. – М.: МГУ, 1990, С. 147.

15. Саврин,В.И. Динамические уравнения в квантовой теории поля и релятивистская теория связанных состояний. Специальный курс лекций. Издательство МГУ, 1996.

16. Матвеев,В.А., Саврин,В.И., Сисакян,А.Н., Тавхелидзе,А.Н. Релятивистские кварковые модели в квазипотенциальном подходе/В.А. Матвеев, В.И. Саврин, А.Н. Сисакян, А.Н. Тавхелидзе// ТМФ, 2002, **132**, С. 267-287.

Учебное издание

Саврин Виктор Иванович

МЕТОД КВАЗИПОТЕНЦИАЛА
В ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Учебное пособие

Редактор Т.И. Кузнецова
Художественный редактор Л.В. Крылова
Компьютерная верстка, макет Э.Н. Воробьева

Подписано в печать 31.01.2006.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 7,8; уч.-изд.л. 8,5
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 300 экз. Заказ № 317
Издательство «Самарский университет»,
443011, г.Самара, ул.Акад.Павлова, 1. Тел.(846) 334-54-23
Отпечатано в ООО «Типография «Книга»
г. Самара, ул. Ново-Садовая, 106.
Тел. +78463353526. E-mail: slovo@samaramail.ru